جزوه معادلات دیفرانسیل

مدرس: اسماعیلی
شماره تماس:۰۹۱۴۹۲۳۸۸۲۶
Collage.miyaneh@yahoo.com
تهیه کننده: بهروز اکرمی

منابع :
- معادلات ديفرانسيل دانشگاه پيام نور
- معادلات ديفرانسيل دكتر مسعود نيكوكار

نمره پاياني درس:
- نمره پايان ترم (۱۰ نمره)
- نمره ميان ترم (۵ نمره)
- حل تمرينات و فعاليت كلاسي (۵ نمره) {تمرينات به صورت متناوب در هر جلسه ارائه مي‌شود كه دانشجو تا جلسه آينده مهلت تحويل دارد}

سرفصلهاي معادلات ديفرانسيل

فصل اول: معادله ديفرانسيل مرتبه اول

فصل دوم: معادلات ديفرانسيل مرتبه دوم و بالاتر

فصل سوم: دستگاه معادلات ديفرانسيل
فصل چهارم: تبديلات لاپلاس

فصل پنجم: حل معادله ديفرانسيل به روش سري‌ها

۱- سري تواني
۲- نقاط معمولي ومنفرد وجواب هاي سري معادلات ديفرانسيل
۳- نقاط منفرد منظم معادلات ديفرانسيل خطي مرتبه دوم
۴- حالتي كه معادله شاخص داراي ريشه هاي برابر است

فصل اول: معادله ديفرانسيل مرتبه اول

ماهيت معادله ديفرانسيل وطبقه بندي آن

مقدمه: با مفهوم معادله يعني رابطه اي كه درآن تساوي باشد، آشنا هستيم. ساده ترين آن، معادله يک مجهولي مي باشد، كه بانماد $f(x)=0$ نشان مي دهيم.

$ax+b=0$ معادله يک مجهولي درجه اول

$ax^2+bx+c=0$ معادله يک مجهولي درجه دوم

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ معادله يک مجهولي درجه سوم

و الي آخر

معادله دو مجهولي كه بانماد $f(x,y)=0$ نشان مي دهيم

$ax+by+c=0$ معادله دو مجهولي درجه اول

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

معادله دو مجهولي درجه دوم

و الي آخر

درمورد معادله دونوع سوال قابل طرح مي باشد:

أ- آيا x_0 جواب معادله $f(x)=0$ يا جفت (x_0,y_0) جواب معادله $f(x,y)=0$ مي باشد؟

ب- جواب معادله $f(x)=0$ يا $f(x,y)=0$ را پيدا كنيد؟

جواب دادن به سوال اول ساده مي باشد زيرا با جايگذاري مي توان مشخص كرد. ولي جواب دادن به سوال دوم مشكل مي باشد. ابتدا بايد معادلات را دسته بندي كرده و براي هر نوع روش خاصي را ارائه داده بعبارت ديگر براي حل معادله بايد دو مرحله را مشخص كنيم:

1) مرحله شناخت

۲) مرحله حل(روش حل)

حـال اگـر درمعادله $f(x,y)=0$ متغيـر x را بعنـوان متغير مستقل و y را بعنوان متغير وابسته درنظر بگيريم آن گـاه x تـابعي از y مـي باشد و مـي تـوان درمـورد مشتق تابع صحبت كرد يعني :

$$y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{d^2y}{dx^2}=y^{(2)},\quad \ldots\quad ,y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

تعريف : معادلـه اي كـه شـامل تركيبـاتي از x (متغيـر مستقل) و y (متغير وابسته) و مشتقات آن باشد، را معادلـه ديفرانسيل نـاميم و بـا نماد $f\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0$ نشان مي دهيم.

درمورد معادله ديفرانسيل نيز مي توان دو سوال طرح كرد:

الف) آيا تابع $f(x,y)=0$ جواب معادله ديفرانسيل مي باشد؟

ب) جواب هاي معادله ديفرانسيل را پيدا كنيد؟

باز جواب دادن به سوال الف) سـاده است (بـا جايگذاري) مثلا آيا تابع $y=e^{2x}$ جـواب معادله $y''-5y'+6y=0$ ميباشد؟

جواب دادن بـه سـوال ب) مـشكل مـي باشـد و بـستگي بـه نـوع معادلـه وطبقـه بنـدي آن دارد. بـاتعريف مرتبـه و درجـه معادلـه ديفرانسيل به سراغ سوال ب) مي رويم.

تعريف: بيشترين تكـرار مشتق در هر معادلـه را مرتبـه آن و توان بيشترين تكرار مشتق را درجه معادله ديفرانسيل ناميم.

مثال :

معادله $(y')^3+y^4=x^5$ مرتبه اول، درجه سوم مي باشد.

٢) معادله $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=x$ مرتبه سوم ، درجه اول مي باشد.

٣) معادله $y^{(2)}+y^{(3)}=y^4$ مرتبه سوم ، درجه اول مي باشد.

مشابه معادله معمولي با توجه به تعريف مرتبـه و درجـه معادلـه ديفرانسيل مي توان آنهـا راطبقـه بنـدي كـرد. بنـابراين سـادهترين معادله ديفرانسيل مرتبه اول بـصورت $f(x,y,y')=0$ مـي باشـد كـه اگـر تـوان y' برابـر بـا يـك باشـد آنگـاه معادلـه ديفرانسيل مرتبه اول درجه اول مي باشد كه بصورت كلي زير نيز نشان داده مي شود.

$$y'=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=F(x,y)$$

تعريف: معادله ديفرانسيل مرتبه اول درجه اول به صورت

$$y'=\frac{f(x)}{g(y)}$$

را معادله جدا شدني نـاميم (مرحلـه شناخت). هر معادله مرتبـه اول درجه اول جاشدني را اختصارا معادله جاشـدني (جـداي پذير)ناميم. هر معادله جدا شدني را مي توان بصورت كلي

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

تبديل كرد.

مثال : معادله $y'=\frac{x^2+x}{y^2-y}$ را حل مي كنيم.

حل :داريم $\Leftarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+x}{y^2-y}$ $\Leftarrow$ آنگاه

$$(x^2+x)dx+(y-y^2)dy=0$$

$$\int (x^2+x)dx+\int (y-y^2)dy=\int 0$$

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3=c$$

درنتيجه عبارت آخر جواب (عمومي)معادله است .

حل معادلـه ديفرانـسيل جداشـدني: بـا انتگرالگيـري از معادلـه جداشدني $M(x)dx+N(y)dy=0$ مي تـوان جـواب آنـرا محاسبه كرد.

تذكر: هدف از حل معادلـه ديفرانـسيل محاسـبه جـواب عمـومي معادلـه ديفرانـسيل مـي باشـد. جـوابي را جـواب عمـومي نـاميم هرگاه تعداد پارامترها به تعداد مرتبه معادله ديفرانسيل باشد كه بعدا آنرا دقيقا تعريف خواهيم كرد.

معادلـه ديفرانـسيل مرتبـه اول درجـه اول ممكـن اسـت بـه ظـاهر جداشدني نباشد ولي با تقسيم بر عباراتي يا تغيير متغير ميتوان آن را تبديل به جدا شدني نمود.

مثال: معادله $(y+1)(x^2+1)dx+(x+1)(y^2+1)dy=0$

به ظاهر جدا شدني نيست، ولي با تقسيم برحاصلضرب عبارات اضافي $(x+1)(y+1)$ داريم $\frac{x^2+1}{x+1}dx+\frac{y^2+1}{y+1}dy=0$

كه جدا شدني است پس با انتگرالگيري داريم :

$$\frac{1}{2}x^2-x+2\ln(x+1)+\frac{1}{2}y^2-y+2\ln(y+1)=c$$

جواب معادله است .

مثال: راديم در هر لحظه بـا آهنگي متناسب بـا جرمش متلاشي مي شود اگـر ۱۰۰ ميلـي گـرم پـس از يـک قـرن بـه ۹۸ ميلي گـرم تبـديل شـود مطلوبسيم باقي مانده پس از ۳ قرن:

حل: فرض كنيم $Q(t)$ مقدار راديم باقي مانده پس از t قرن باشد داريم:

$$\frac{dQ}{dt}\propto Q \Rightarrow \frac{dQ}{dt}=kQ \Rightarrow \frac{dQ}{Q}=kdt \Rightarrow$$

$$\int\frac{dQ}{Q}=\int kdt \Rightarrow \ln Q=kt+c \Rightarrow$$

$$Q(t)=e^c e^{kt} \Rightarrow \begin{cases} Q(0)=100 \to e^c=100 \\ Q(1)=98 \to k=-0.02 \end{cases}$$

$$Q(t)=100e^{-0.02t}$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير و يافتن جواب عمومي و و خصوصي در صورت وجود شرايط اوليه:

$$1)\ x\sqrt{1-y}\ dx-\sqrt{1-x^2}dy=0$$

$$2)\ 2x(y+1)dx-ydy=0 \quad y(0)=-2$$

$$3)\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$4)\ x\cos y\ dx+\sqrt{1+x}\sin y\ dy=0$$

مطلوبست حل معادله زير:

$$(x^2+y^2)(xdy+ydx)-3xy(xdx+ydy)=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=u \Rightarrow 2(xdx+ydy)=du \\ xy=t \Rightarrow xdy+ydx=dt \end{cases} \Rightarrow udt-3t(\frac{1}{2}du)=0$$

$$\frac{dt}{t}-(\frac{3}{2}\frac{du}{u})=0 \Rightarrow \int\frac{dt}{t}=\int(\frac{3}{2}\frac{du}{u})$$

$$\ln t=\frac{3}{2}\ln u+c \Rightarrow \ln(\frac{t}{u3/2})=c$$

معادله دیفرانسیل همگن

میدانیم معادله مرتبه اول درجه اول بصورت $y' = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$

و یا به صورت $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ مـی باشد.

مثلا معادلات

$$1)\ \ y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \qquad 2)\ \ y' = \frac{x^2+y}{y^2+x},$$

معادلات مرتبه اول درجه اول مي باشند که هیچکدام جدا شدني نیستند ولـي معادلـه اولـي داراي خاصـیتي مـي باشـد کـه معادلـه دومي نیست. درمعادله دیفرانسیل اول تمام جملات توابع

$$z = g(x,y)\ ,\ z = f(x,y)$$

از توان یکسان دو مي باشد ولي معادله دومي چنین نیست. این مفهوم رابانماد ریاضي تعریف مي کنیم.

تعریف : تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ را تـابع همگـن از درجه n نامیم هرگاه درشرط زیر صدق کند:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

تابع $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ تـابع همگـن ازدرجـه دو ميباشد.

تابع $f(x,y) = xe^{\frac{y}{x}} + y\sin\dfrac{y}{x}$ تـابع همگـن از درجـه یـک ميباشد.

تعریف: معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

را معادلـه همگـن نـامیم هـر گـاه توابـع دو متغیـره f و g توابـع همگن از درجه یکسان باشند. بعبارت دیگر معادله دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

را معادلـه همگـن نـامیم هـر گـاه توابـع دو متغیـره M و N توابع همگن از درجه یکسان باشند.

حل معادله دیفرانسیل همگن:

فرض کنیم معادله $y' = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ همگن باشد. با فرض تغییر متغیر $v = y/x$ داریم

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad y' = v'x + v \quad OR \quad dy = vdx + xdv$$

آن گاه با جایگذاري درمعادله نتیجه مي شود که

$$v'x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{f(1,v)}{g(1,v)} - v = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = \frac{dx}{x}$$

کـه معادلـه اخیر جدا شدني است مي تـوان آنرا بـه روش جدا شدني حل کرد وبا جایگذاري $v = y/x$ جـــواب معادلـــه دیفرانسیل اولیه بدست مي آید.

مثال: معادله دیفرانسیل همگن $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$

را حل مي کنیم باجایگذاري $y = vx$ و $dy = vdx + xdv$

داریم:

$$(x^2 + v^2x^2)dx + xvx(vdx + xdv) = 0$$
$$(x^2 + v^2x^2 + v^2x^2)dx + x^3vdv = 0$$
$$x^2(1 + 2v^2)dx + x^3vdv = 0$$
$$(1 + 2v^2)dx + xvdv = 0$$

با تقسیم برحاصلضرب عبارات اضافي $x(1 + 2v^2)$

داریم:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{1 + 2v^2}dv = \int 0$$

$$\ln x + \frac{1}{4}\ln(1+2v^2) = \ln c$$

تذکر: براي ساده کردن به جاي c معمولا $\ln\ c$ را بعنوان پارامتر ثابت اختيار مي کنيم.

$$\ln x\,(1+2v^2)^{\frac{1}{4}} = \ln c \quad \Rightarrow \quad x\sqrt[4]{(1+2v^2)} = c \quad \Rightarrow$$

$$x\sqrt[4]{(1+\frac{2y^2}{x^2})} = c$$

جواب معادله ديفرانسيل مي باشد.

تمرين: مطلوبست حل معادله ديفرانسيل زير؟

$$1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{-(x-y)}{x-4y}$$

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$$

معادلات با ضرايب خطي:

معادلات به صورت $(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy=0$

معادلات با ضرايب خطي گويند.

حل معادلات با ضرايب خطي:

حالت اول: اگر دو خط در نقطه (h,k) متقاطع باشند با تغيير متغير $x=X+h$ و $y=Y+k$ معادله به معادله همگن تبديل ميشود.

حالت دوم: اگر اين دو خط موازي باشند با تغيير متغير

$a_1x+b_1y=z$ معادله به معادله جداشدني تبديل مي‌شود

مطلوبست حل معادلات ذير:

$$1)\ (x+y-1)\,dx+(x-y)\,dy=0$$

$$2)\ (2x+2y-1)\,dx+(x+y)\,dy=0$$

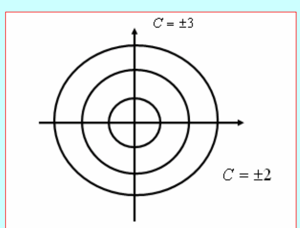
دسته منحني ها و دسته منحني هاي متعامد

ملاحظه شد که جواب عمومي هر معادله ديفرانسيل مرتبه اول معمولا شامل يک ثابت اختياري موسوم به پارامتر است. وقتي مقادير مختلفي به اين پارامتر نسبت داده مي شود، يک دسته منحني به دست مي آيد هر يک از اين منحني ها يک جواب خصوصي معادله ديفرانسيل مفروض است و همه آنها با هم جواب عمومي آن را تشکيل مي دهند. بنابراين معادله

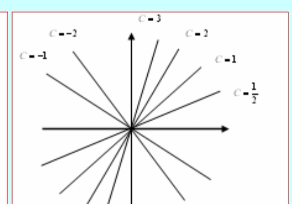
$f(x,y,c)=0$

به ازاي مقادير مختلف براي پارامتر c يک دسته منحني مي‌باشد .

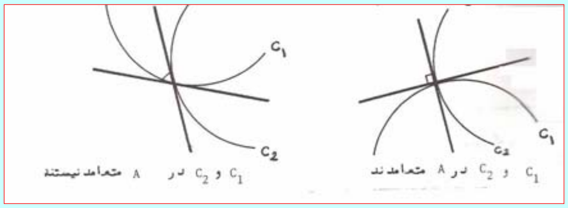
حال مي خواهيم دسته منحني هاي متعامد بر يک دسته منحني مفروض را باستفاده از معادله ديفرانسيل بدست آوريم که کاربردي از معادله ديفرانسيل مي باشد. بعنوان مثال تعدادي دسته منحني را در زير رسم مي کنيم :



الف) $X^2+Y^2=C^2$



ب) $Y=CX$



حال با توجه به مطالب بالا و با استفاده از روند زیر مي توان دسته منحني هاي متعامد بريک دسته منحني ها را پيدا کرد :

$$f(x,y,c)=0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x,y,y')=0$$

معادله دسته منحني ها — معادله ديفرانسيل دسته منحني ها

$$\xrightarrow{y'=-\frac{1}{y'}} f\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0 \;\Rightarrow\; g(x,y,c)=0$$

معادله ديفرانسيل دسته منحني هاي متعامد — معادله دسته منحني هاي متعامد

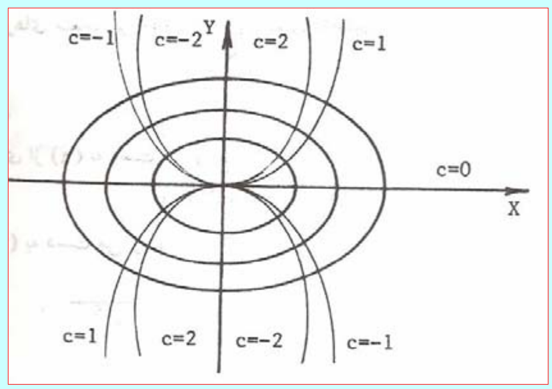
مثال : دسته منحني هاي متعامد بردسته منحني هاي دواير به مرکز مبدا وشعاع دلخواه رابدست مي آوريم:

$$x^2+y^2=c^2 \;\Rightarrow\; 2x+2yy'=0 \Rightarrow x+yy'=0$$

$$\xrightarrow{y'\to-\frac{1}{y'}} x+y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0 \;\Rightarrow x=\frac{y}{y'} \Rightarrow xy'=y$$

$$x\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+\ln c$$

$\Rightarrow \ln y=\ln cx \Rightarrow y=cx \leftarrow$ دسته منحني هاي متعامد



اغلب مناسب است که دسته منحني هاي داده شده را برحسب مختصات قطبي بيان کنيم دراين حالت از اين موضوع استفاده مي کنيم که اگر φ زاويه بين شعاع حامل و خط مماس باشد آن گاه $\tan\varphi=\dfrac{rd\theta}{dr}$ (رياضي عمومي). با استفاده بحث بالا براي يافتن دسته منحني هاي متعامد درمعادله ديفرانسيل دسته منحني داده شده به جاي عبارت $\dfrac{rd\theta}{dr}$ منفي عکس آن يعني $-\dfrac{dr}{rd\theta}$ را جايگذاري مي کنيم.

مثال : دسته منحني هاي متعامد بردسته منحني هاي $x^2+y^2=2cx$ را درمختصات قطبي بدست مي آوريم. معادله دسته منحني ها در مختصات قطبي عبارت است از: $r=2c\cos\theta$

بنابراين : $\dfrac{dr}{d\theta}=-2c\sin\theta$

که با جايگذاري مقدار c داريم:

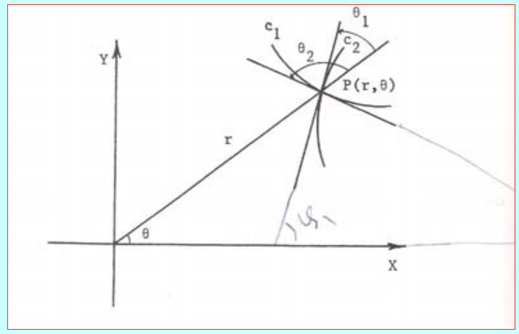
$$-\frac{dr}{d\theta}=\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)\sin\theta \;\Rightarrow\; -\frac{rd\theta}{dr}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

که با جايگذاري $-\dfrac{dr}{rd\theta}$ به جاي $\dfrac{rd\theta}{dr}$ داريم:

$$-\frac{dr}{rd\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dr}{r}=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$\ln r=\ln\sin\theta+\ln 2c \quad\Rightarrow\quad \ln r=\ln 2c\sin\theta\Rightarrow$$

معادله دسته منحني هاي متعامد مي باشد. $\leftarrow$ $r=2c\sin\theta$



معادله ديفرانسيل کامل

در رياضيات عمومي با ديفرانسيل توابع دو متغيره $z=f(x,y)$ آشنا شديم و ملاحظه کرديم که ديفرانسيل کامل تابع را که با نماد df نشان مي دهيم، عبارت است از

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

و همچنين معادله ديفرانسيل مرتبه اول درجه اول بصورت کلي $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ مي باشد.

تعريف :معادله ديفرانسيل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را معادله کامل ناميم هر گاه تابع دو متغيره $z=f(x,y)$ موجود باشد بطوري که $\dfrac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$

با توجه به تعريف بالا تعيين اينکه معادله ديفرانسيل داده شده کامل مي باشد، مشکل است زيرا بايد تمام توابع دو متغيره راجستجو کنيم و ملاحظه کنيم که بترتيب کدام تابع داراي مشتقات جزيي نسبت به x و y برابر با توابع $M=M(x,y)$ و $N=N(x,y)$ مي باشد.

اگر اين کار امکان پذير هم باشد، مشکل است به همين دليل شرايطي روي M، N بدست مي آوريم که وجود چنين تابعي را تضمين کند. با مشتق گيري جزيي از طرفين رابطه هاي

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$$

با مشتق گيري نسبت به x و y داريم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

با توجه به اينکه براي توابع پيوسته داريم: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

بنابراين: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

بنابراين شرط کامل بودن معادله ديفرانسيل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

عبارت است از :

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

(مرحله شناخت).

مثال : كامل بودن معادلات ديفرانسيل زير را بررسي نماييد.

$$(2x+y)dx+\left(x+3y^2\right)dy=0$$

پس كامل ميباشد $\longleftarrow$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=1=\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$

ب)

$$\left(2xy^3+y\right)dx+\left(3x^2y^2+3y^2+x\right)dy=0$$

پس كامل ميباشد $\dfrac{\partial M}{\partial y}=6xy^2+1=\dfrac{\partial N}{\partial x}=6xy^2+1$

حل معادله ديفرانسيل كامل:

فرض كنيم كه معادله ديفرانسيل

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

كامل باشد بنابر تعريف معادله ديفرانسيل كامل، تابعي مانند $z=f(x,y)$ موجود است كه:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

پس بنابر تساوي هاي بالا نتيجه مي شود $df=0$

ويا $f=c$ جواب معادله ديفرانسيل مي باشد .

تنها معلومات، مشتقات جزيي f مي باشد كه با استفاده از روند زير مي توان آنرا محاسبه كرد.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)\xrightarrow{\int x} f=\int M(x,y)dx+\varphi(y)\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\end{cases}$$

$$\rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int m(x,y)dx+\varphi'(y)$$

آن گاه با استفاده از رابطه دوم $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ مقدار $\varphi'(y)$ بدست مي آيد كه با انتگرال گيري از آن مجهول كه همان $\varphi(y)$ ميباشد محاسبه مي شود در نتيجه f بدست مي آيد كه $f=c$ جواب معادله ديفرانسيل است .

مثال: ملاحظه شد كه معادله

$$(2x+y)dx+\left(x+3y^2\right)dy=0$$

كامل مي باشد پس:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y\xrightarrow{\int x} f=x^2+yx+\varphi(y)\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+\varphi'(y)\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2\Rightarrow x+\varphi'(y)=x+3y^2\Rightarrow\varphi'(y)=3y^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\varphi(y)=y^3\Rightarrow f=x^2+yx+y^3\xrightarrow{df=0}x^2+yx+y^3=c$$

جواب معادله ديفرانسيل است.

عامل انتگرال ساز

معادله ديفرانسيل $ydx-\left(x^2+x\right)dy=0$ كامل نمي باشد زيرا

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-2x-1,\ \frac{\partial M}{\partial y}=1$$

ولي اگر طرفين معادله بالا را در $u=\dfrac{1}{x^2}$ ضرب كنيم داريم:

$$\frac{y}{x^2}dx-\left(1+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

واين معادله ديفرانسيل جديد كامل مي باشد زيرا

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^2},\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x^2}$$

و مي توان به روش كامل معادله ديفرانسيل جديد را حل كرد .

بنابراين ممكن است معادله ديفرانسيل كامل نباشد ولي باضرب كردن عاملي درتابع كه آنرا عامل انتگرال ساز گوييم تبديل به كامل كرد. اكنون شرط وجود عامل انتگرال ساز وچگونگي محاسبه آن را بيان مي كنيم.

فرض كنيم كه معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ كامل نباشد يعني $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ودارای عامل انتگرال ساز $u=u(x,y)$ باشد، آنگاه طبق تعريف عامل انتگرال ساز معادله

$$uMdx+uNdy=0$$

كامل مي‌باشد.

با توجه به شرط کامل بودن داریم

$$\boxed{u\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial x}}$$

که محاسبه u از این معادله ممکن نیست به همین دلیل تحت شرایط خاصی عامل انتگرال ساز را بررسی می کنیم.

الف) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از x باشد یعنی $u=u(x)$ ، آن گاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

که با جایگذاری داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} u\dfrac{\partial M}{\partial y}+M\dfrac{\partial u}{\partial y}=u\dfrac{\partial N}{\partial x}+N\dfrac{\partial u}{\partial x}\ \Rightarrow \\ p(x)=\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\ \rightarrow \left[u=e^{\int p(x)dx}\right]\end{array}}$$

ب) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از y باشد یعنی $u=u(y)$ ، آ نگاه

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dy}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0$$

که با جایگذاری داریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} u\dfrac{\partial M}{\partial y}+M\dfrac{\partial u}{\partial y}=u\dfrac{\partial N}{\partial x}+N\dfrac{\partial u}{\partial x}\ \Rightarrow \\ q(y)=\dfrac{1}{-M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\ \Rightarrow \left[u=e^{\int q(y)dy}\right]\end{array}}$$

مثال :عامل انتگرال سازی برای معادله $xy\,dx+\left(1+x^2\right)dy=0$ را پیدا می کنیم.

حل: ابتدا مقدار مشترک محاسبه می کنیم

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x-2x=-x$$

که با تقسیم بر $-M$ مقدار به دست آمده داریم:

$$q(y)=\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-xy}(-x)=\frac{1}{y}$$

پس $u=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$ عامل انتگرال ساز می باشد.

تذکر: گاهی معادله دیفرانسیل غیر کامل دارای عامل انتگرال سازی بصورت $u(x,y)=x^n y^m$ است، که درآن m، n ثابتهای مناسبی هستند.

برای یافتن عامل انتگرال سازی به صورت $u(x,y)=x^n y^m$ طرفین معادله را درآن ضرب می کنیم واز شرط کامل بودن استفاده می کنیم.

تذکر: روش دسته بندی یا کوتاه

گاهی با جستجو کردن می توان معادله دیفرانسیل را به یکی از حالات زیر دسته بندی کرد:

$$M(x)dx=N(y)dy$$
$$M(x)dx=d\big(v(x,y)\big)$$
$$d\big(u(x,y)\big)=N(y)dy$$
$$d\big(u(x,y)\big)=d\big(v(x,y)\big)$$

که به سادگی می توان با انتگرال گیری از طرفین معادلات جواب آنها را بدست آورد .

يادآوري:

$1) \rightarrow \quad d(xy) = ydx + xdy$

$2) \rightarrow \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

$3) \rightarrow \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2}$

$4) \rightarrow \quad d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$

$5) \rightarrow \quad d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$

$6) \rightarrow \quad d\left(\tan^{-1}(xy)\right) = \frac{ydx + xdy}{1 + x^2y^2}$

$7) \rightarrow \quad d\left(\ln(x^2 + y^2)\right) = 2\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

مثال: معادله ديفرانسيل $(y^2 + y)dx - xdy = 0$ را با روش دسته بندي حل مي كنيم.

حل:

$$(y^2 + y)dx - xdy = 0 \Rightarrow ydx - xdy = -y^2dx \Rightarrow$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = -dx \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = -dx \xrightarrow{\int}$$

$$\frac{x}{y} = -x + c \Rightarrow y = \frac{x}{c - x}$$

تمرين:

۱- شكل آينه مقعري را به دست بياوريد كه اگر از منبع نوراني نوري به آن بتابانيم موازي محور x ها منعكس شود.

۲- استخري به عرض ۱۰ متر در نظر ميگيريم.پسري در يک طرف استخر قايقي را از آن سمت استخر به طرف خود مي‌كشد حال اگر اين پسر حين كشيدن قايق در عرض استخر در طول استخر نيز با سرعتي معلوم بدود مطلوبست مسير قايق بعد از t ثانيه.

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

$1)\ y\,dx + (x + y^2)dy = 0$

$2)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{xe^y + 2y}$

$3)\ (y^2 + y)dx - x\,dy = 0$

$4)\ \frac{ydx - xdy}{y^2} + y^2dy = 0$

$5)\ xy\,dx + (1 + x^2)dy = 0$

$6)\ (x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$

$7)\ x\,dy - y\,dx = (4x^2 + 9y^2)(4x\,dx + 9y\,dy)$

معادله ديفرانسيل مرتبه اول خطي

ملاحظه شد كه معادله مرتبه اول بصورت $f(x,y,y') = 0$ ميباشد كه اگر توان هاي y', y برابر با يک باشد آنرا معادله مرتبه اول خطي ناميم (در معادله خطي $ax + by = c$ نيز توان x و y برابر با يک مي باشد ولي اگر توان يكي از آنها به غير يک باشد آن گاه معادله منحني مي باشد) بنابراين معادله مرتبه اول خطي به صورت زير مي‌باشد

$$f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$$

با تقسيم طرفين بر f_1 معادله مرتبه اول خطي بصورت كلي است زير در مي آيد (مرحله شناخت)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

براي مثال معادلات زير مرتبه اول خطي هستند:

$1)\quad y' + \frac{1}{x}y = x^3$

$2)\quad y' + \frac{1}{x}y = e^x$

$3)\quad y' - 2xy = e^{x^2}$

براي حل معادله ديفرانسيل $y' + p(x)y = q(x)$ طـرفين اين معادله را در عامل انتگرال ساز $u = e^{\int p(x)dx}$ ضرب مي‌كنيم كه با ضرب اين عامل در معادله جواب عمومي معادله مرتبه اول خطي به شكل زير در مي آيد.

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}.q(x)dx + c\right]}$$

مثال : معادله مرتبه اول خطي $y' + \frac{1}{x}y = x^3$ را حل مي كنيم.

$$q(x) = x^3 \qquad p(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}[\int e^{\int \frac{1}{x}dx}.x^3dx + c \Rightarrow$$

$$y = e^{-\ln x}[\int e^{\ln x}.x^3dx + c] \Rightarrow y = e^{\ln x^{-1}}[\int x.x^3dx + c] \Rightarrow$$

$$y = x^{-1}\left(\frac{1}{5}x^5 + c\right) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{c}{x}$$

جواب معادله ديفرانسيل است.

حالت خاصي از معادلات مرتبه اول خطي به صورت

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

مي باشد كه توان هاي $x' = \frac{dx}{dy}$ و x برابر با يک مي باشد.
با توجه به روش حل معادله مرتبه اول خطي با تعويض نقش x با y وبالعكس نتيجه مي شود كه

$$\boxed{x = e^{-\int p(y)dy}[\int e^{\int p(y)dy}.q(y)dy + c]}$$

حالت خاصي از معادلات مرتبه اول كه تبديل به خطي مي‌شود به صورت $\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^n}$ مي باشد كه به ازاي $\boxed{n=0}$ معادله مرتبه اول خطي است، $\boxed{n=1}$ معادله جدا شدني است وبه ازاي $\boxed{n \neq 0,1}$ ، معادله برنولي ناميده مي شود. معادله ديفرانسيل برنولي را مي توان با تغيير متغير $\boxed{z = y^{1-n}}$ حل كرد و داراي جواب است.

$$\boxed{z = y^{1-n} = e^{-\int (1-n)p(x)dx}[\int e^{\int (1-n)p(x)dx}.(1-n)q(x)dx + c}$$

مثال: معادله $y' + \frac{1}{x}y = x^3y^4$ را حل مي كنيم.

$$q(x) = x^3 \qquad p(x) = \frac{1}{x} \qquad n = 4 \qquad 1 - n = -3$$

$$y^{-3} = e^{-\int (-3)\frac{1}{x}dx}[\int e^{\int (-3)\frac{1}{x}dx}.(-3)x^3dx + c] \Rightarrow$$

$$y^{-3} = x^3[\int x^{-3}.(-3x^3)dx + c] \Rightarrow$$

$$y^{-3} = x^3[\int -3dx + c] \Rightarrow$$

$$y^{-3} = x^3(-3x + c) \Rightarrow$$

$$y^{-3} = -3x^4 + cx^3$$

معادله ديفرانسيل **كلرو**(Clairaut)

معادلـــه ديفرانـــسيل بـــه صـــورت $\boxed{y = xy' + f(y')}$ بـــه نـــام **كلرو** (Clairaut)معروف است. بسادگي ملاحظه مي‌شود

$$\boxed{y = cx + f(c)}$$

جـوابي از معادلـه بـالا مـي باشـد، بـا مـشتق گيـري $\boxed{y' = c}$ كـــه بـــا جايگـــذاري در جـــواب $y = xy' + f(y')$ مـــي‌شـــود كه همان معادله كلرو است. بنابراين جواب معادله كلرو با جايگذاري $\boxed{y' = c}$ بدست مي آيد.

مثال : معادله $y = xy' + (y')^2$ را حل کنيد.

حل: با جايگذاري $y' = c$ معادله داراي جواب است.

$$\boxed{y = cx + c^2}$$

معادله ديفرانسيل ريکاتي

معادله ديفرانسيل ريکاتي مرتبه اول **ريکاتي** (Riccati) به صورت $\boxed{y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2}$ مي باشد به شرط $h(x) \neq 0$

براي پيدا کردن جواب عمومي معادله بالا بايد جوابي خاص از آن معلوم باشد. اگر $y = y_1(x)$ يک جواب خاص از معادله بالا باشد. جايگذاري $y = y_1 + \frac{1}{u}$ $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ معادله را به معادله ديفرانسيل

$$\boxed{u' + [g(x) + 2h(x)y_1]u = -h(x)}$$

که مرتبه اول خطي است، تبديل مي کند.

مثال: معادله $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ (با $y_1 = -x^2$) را حل مي‌کنيم:

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = \frac{2}{x} \quad h(x) = \frac{-1}{x}$$

$$u' + [\frac{2}{x} + 2(-\frac{1}{x}).(-x^2)]u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' + (\frac{2}{x} + 2x)u = \frac{1}{x}$$

$$p(x) = \frac{2}{x} + 2x \qquad q(x) = \frac{1}{x}$$

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)}[\int e^{2\ln x + x^2}\frac{1}{x}dx + c] \quad \Rightarrow$$

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)}[\int e^{2\ln x + x^2}\frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = e^{-2\ln x}e^{-x^2}[\int e^{2\ln x}.e^{x^2}\frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}[\int x^2.e^{x^2}\frac{1}{x}dx + c]$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}[\int xe^{x^2}dx + c]$$

$$u = \frac{1}{2}x^{-2} + cx^{-2}e^{-x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2e^{x^2}} = \frac{e^{x^2} + 2c}{2x^2e^{x^2}}$$

$$y = -x + \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2c}$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

1) $y' - 2xy = e^{x^2}$

2) $y' + xy = \frac{x}{y^3} \quad y \neq 0$

3) $y = y'x + (y')^2$

فصل دوم: معادلات ديفرانسيل مرتبه دوم و بالاتر

معادله ديفرانسيل مرتبه دوم

دراين فصل معادله مرتبه دوم $f(x,y,y',y'')=0$ را در حالات خاص بررسي مي كنيم.

معادله مرتبه دوم فاقد x: به صورت $f(y,y',y'')=0$

مثلا $yy''=(y')^2$ و $y''+y=0$ مي باشد.

معادله مرتبه دوم فاقد y: به صورت $f(x,y',y'')=0$

مثلا $xy''=y'$ و $xy''-y'=3x^2$ مي باشد.

حل معادله $f(x,y',y'')=0$

با تغيير متغير $y'=p$ مي توان معادله را به معادله مرتبه اول تبديل كرد كه اگر معادله بدست آمده يكي از معادلات مرتبه اول باشد كه قبلا بحث شده است مي توان آنرا حل كرد.

زيرا:

$$y'=p \quad \Rightarrow \quad y''=\frac{dp}{dx}$$

$$f(x,y',y'')=0 \quad \Rightarrow \quad f(x,p,\frac{dp}{dx})=0$$

كه معادله مرتبه اول مي باشد.

حل معادله $f(y,y',y'')=0$

با تغيير متغير $y'=p$ مي توان معادله را به معادله مرتبه اول تبديل كرد كه اگر معادله بدست آمده يكي از معادلات مرتبه اول باشد كه قبلا بحث شده است مي توان آنرا حل كرد.

زيرا

$$y'=p \quad \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$f(y,y',y'')=0 \quad \Rightarrow f(y,p,p\frac{dp}{dy})=0$$

معادله مرتبه اول با فرض y متغير مستقل و p متغير وابسته مي باشد.

مثال: مطلوبست جواب عمومي معادله ديفرانسيل زير؟

$$xy''=y'$$

$$y'=p \ \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

$$x\frac{dp}{dx}=p \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln p=\ln x+\ln c_1 \Rightarrow \ln p=\ln c_1x \Rightarrow p=c_1x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=c_1x \Rightarrow \int dy=\int c_1xdx \Rightarrow y=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2$$

مثال: مطلوبست جواب عمومي معادله ديفرانسيل زير؟

$$yy''=(y')^2$$

$$y'=p \quad \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy}=p^2 \Rightarrow ydp=pdy$$

$$\Rightarrow\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow \ln p=\ln y+\ln c_1 \Rightarrow p=c_1y$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=c_1y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int c_1dx \Rightarrow \ln y=c_1x+c_2$$

$$\Rightarrow y=e^{c_1x+c_2}=e^{c_1x}e^{c_2} \Rightarrow y=ce^{c_1x}$$

تذكر: درحل اين نوع معادلات ديفرانسيل مرتبه دوم، درواقع هر معادله مرتبه دوم را به به دو معادله مرتبه اول تبديل كرده وآنها را حل مي كنيم.

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

1) $y''+y=0$

2) $y''+y'=x$

معادله ديفرانسيل مرتبه دوم خطي

بصورت كلي

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = f_4(x)$$

مي باشد كه اگر $f_4(x)=0$ آنرا مرتبه دوم خطي همگن ناميم و جواب آن را جواب عمومي معادله ناميده و با y_g نمايش مي‌دهيم. در حالتيكه $f_4(x)\neq 0$ جواب معادله فوق را جواب خصوصي ناميده و با y_p نمايش مي‌دهيم. جواب كلي معادله فوق مجموع اين دو جواب مي‌باشد يعني

$$\boxed{y = y_g + y_p}$$

اگر f_1، f_2 و f_3 توابع ثابت باشند بعبارت ديگر مقادير آنها اعداد ثابت باشند آن گاه معادله بصورت

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

مي باشد كه مي توان آنرا بصورت ساده

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

ملاحظه كرد كه آنرا مرتبه دوم خطي همگن با ضرايب ثابت، يا اختصاراً با ضرايب ثابت ناميم . (مرحله شناخت)

حل معادله مرتبه دوم خطي همگن با ضرايب ثابت

با تعريف نماد $D = \frac{d}{dx}$ داريم

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy \quad , \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D^2y$$

با جايگذاري در معادله داريم:

$$y'' + ay' + by = 0 \;\Rightarrow\; (D^2 + aD + b)y = 0$$

معادله $(D^2 + aD + b = 0)$ را معادله كمكي (يا مفسر) ناميم كه يك معادله درجه دوم مي‌باشد. آن را حل مي كنيم سه حالت رخ مي‌دهد:

الف) معادله مفسر داراي دو ريشه حقيقي متمايز (m_1 و m_2) باشد آنگاه جواب عمومي معادله ديفرانسيل به صورت زير خواهد بود:

$$\boxed{y_g = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}}$$

ب) داراي ريشه حقيقي مضاعف (m) باشد آنگاه جواب عمومي معادله ديفرانسيل به صورت زير خواهد بود:

$$\boxed{y_g = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}}$$

ج) داراي دو ريشه مختلط متمايز به صورت ($m_1,m_2=a\pm ib$) باشد آنگاه جواب عمومي معادله ديفرانسيل به صورت زير خواهد بود:

$$\boxed{y_g = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)}$$

مثال: مطلوبست حل معادلات زير:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow \\ D^2 - 5D + 6 = 0 \Rightarrow D = 2,3 \Rightarrow y_g = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2)\ y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow \\ D^2 - 4D + 4 = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow y_g = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 3)\ y'' - y' + y = 0 \Rightarrow \\ D^2 - D + 1 = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \\ y_g = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{array}}$$

تعريف: براي هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ رونسكين (Wronskian) توابع f و g را به صورت زير نمايش و تعريف مي‌كنيم.

$$w(f,g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

ثابت مي شود كه رونسكين متحد با صفر است اگر وفقط اگر دو تابع وابسته خطي باشند. بعبارت ساده‌تر دو تابع، وابسته خطي‌اند هر گاه يكي مضرب ديگري باشد، درغير اين صورت آنها را مستقل خطي مي ناميم.

حل معادله ديفرانسيل مرتبه دوم خطي غير همگن

ملاحظه شد كه معادله مرتبه دوم خطي با ضرايب ثابت غير همگن بصورت $y'' + ay' + by = f(x)$ مي باشد كه براي حل آن همان طور كه گفتيم بايد جواب عمومي آن را در حالت همگن پيدا كرده سپس يك جواب خصوصي براي حالت غير همگن آن بدست آوريم جواب كلي معادله عبارتست از مجموع دو جواب عمومي و خصوصي: $\boxed{y = y_g + y_p}$

پس هدف از اين قسمت درس پيدا كردن جواب خصوصي معادله غير همگن : $y'' + ay' + by = f(x)$

روش تغيير پارامتر:

فرض كنيم جواب عمومي معادله همگن $y'' + ay' + by = 0$ **به صورت** $y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ **باشد**

آنگاه جواب خصوصي معادله $y'' + ay' + by = f(x)$ به صورت زير محاسبه مي‌شود:

$$\boxed{\begin{gathered} y_p = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 \\ \begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \end{cases} \\ v_1 = \int \frac{-y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx \quad , \quad v_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx \end{gathered}}$$

مطلوبست حل معادله زير:

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^x$$

$$\left\{ y'' - 5y' + 6y = 0 \right. \Rightarrow D^2 - 5D + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 2 \\ D_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{3x} = 0 \\ v_1'(2e^{2x}) + v_2'(3e^{3x}) = 3e^x \end{cases}$$

$$v_1 = 3e^{-x} \quad , \quad v_2 = \frac{-3}{2} e^{-2x}$$

$$y_p = 3e^{-x} . e^{2x} - \frac{3}{2} e^{-2x} e^{3x} = 3e^x - \frac{3}{2} e^x = \frac{3}{2} e^x$$

$$\boxed{y = y_g + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2} e^x}$$

مثال: مطلوبست حل معادله زير؟

$$(D^2 - 3D + 2) y = e^x$$

$$(D - 1)(D - 2) y = e^x$$

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y_p = v_1 e^x + v_2 e^{2x}$$

$$\begin{cases} v_1' e^x + v_2' e^{2x} = 0 \\ v_1' e^x + 2 v_2' e^{2x} = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -x \\ v_2 = -e^{-x} \end{cases}$$

$$y_p = -x e^x - e^{-x} e^{2x} = -(1 + x) e^x$$

$$y = y_p + y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - (1 + x) e^x$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير:

1) $y'' - 5y' + 6y = 1 + x$

2) $y'' - 5y' + 6y$

3) $y'' - y' - 6y = e^{-x}$

4) $y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$

حل معادله مرتبه nام خطي همگن با ضرايب ثابت

معادله مفسر را كه در معادله مرتبه دوم داشتيم تعميم مي‌دهيم:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \Rightarrow$$

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = 0 \Rightarrow$$

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) = 0$$

$$\boxed{(D - m_1)(D - m_2)(D - m_3) \ldots (D - m_n) = 0}$$

با توجه به ريشه‌هاي معادله مفسر، جواب عمومي برابر است با عبارت‌هاي زير:

حل معادله مرتبه nام خطي همگن با ضرايب ثابت

۱- به ازاي هر ريشه حقيقي مانند m_k يك عبارت به صورت

$$\boxed{c_k e^{m_k x}}$$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

۲- به ازاي هر ريشه حقيقي تكراري m_k از مرتبه r يك عبارت به صورت

$$\boxed{c_1 e^{m_k x} + c_2 x e^{m_k x} + \dots + c_r x^{r-1} e^{m_k x}}$$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

حل معادله مرتبه nام خطي همگن با ضرايب ثابت

۳- با ازاي هر جفت ريشه مختلط a±ib يك عبارت به صورت

$$\boxed{e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)}$$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

۴- با ازاي هر جفت ريشه مختلط تكراري a±ib از مرتبه rام يك عبارت به صورت

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + x e^{ax}(c_3 \cos bx + c_4 \sin bx) + \dots + \\ x^{r-1} e^{ax}(c_{2r-1} \cos bx + c_{2r} \sin bx) \end{array}}$$

به جواب عمومي اضافه مي‌شود.

مثال: مطلوبست حل معادله زير؟

$$D(D-1)(D-2)^2 y = 0 \Rightarrow$$

$D = 0,1 \longrightarrow$ ريشه‌هاي حقيقي

$D = 2 \longrightarrow$ ريشه تكراري از مرتبه دوم

$$y_g = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x} =$$
$$c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$$

تمرين: مطلوبست حل معادلات زير؟

1) $(D-1)(D-2)(D+2)^2 y = 0$

2) $(D-2)(D+1)(D+3) y = 0$

3) $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1) y = 0$

4) $(D-2)^2 (D+2) y = 0$

5) $(D^2+9)^2 (D^2-4) y = 0$

6) $(D^2 - 2D + 5)^2 y = 0$

حل معادله مرتبه nام خطي غير همگن با ضرايب ثابت

اين معادله به صورت زير مي‌باشد

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

روش تغيير پارامتر را مي توان براي اين معادلات نيز تعميم داد، يعني اگر:

$$y_g = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

جواب عمومي معادله همگن مربوطه باشد آن گاه با فرض

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

حل معادله مرتبه nام خطي غير همگن با ضرايب ثابت

و حل دستگاه n معادله n مجهولي زير مي‌توان جواب خاص معادله غير همگن را بدست آورد:

$$\begin{cases} v_1' u_1 + v_2' u_2 + \dots + v_n' u_n = 0 \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' + \dots + v_n' u_n' = 0 \\ \vdots \\ v_1' u_1^{(n-2)} + v_2' u_2^{(n-2)} + \dots + v_n' u_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' u_1^{(n-1)} + v_2' u_2^{(n-1)} + \dots + v_n' u_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

مثال: مطلوبست حل معادله زير؟

$$(D^3+3D^2-4)y=xe^{-2x}$$

$$(D-1)(D+2)(D+1)y=xe^{-2x}$$

$$y_g=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3xe^{-2x}\quad\Rightarrow\quad y_p=v_1e^x+v_2e^{-2x}+v_3e^{-x}$$

$$\begin{cases} v_1'e^x+v_2'e^{-2x}+v_3'e^{-x}=0\\ v_1'e^x-2v_2'e^{-2x}-v_3'e^{-x}=0\\ v_1'e^x+4v_2'e^{-2x}+v_3'e^{-x}=xe^{-2x}\end{cases}$$

$$y_p=?$$

$$y=y_p+y_g=?$$

معادله کشي-اويلر

معادلـــــــه مرتبــــــــه دوم همگن $x^2y''+axy'+by=0$ را که درآن a و b اعداد ثا بت اند معادله کشي-اويلر مي ناميم.

براي مثال معادلات ديفرانسيل زير معادله هاي کشي – اويلر مي باشند.

الف) $x^2y''+xy'-y=0$

ب) $x^2y''-4xy'+6y=0$

حل معادله کشي – اويلر

اين معادله را با تغيير متغير $x=e^t$ مي توان به معادله مرتبـه دوم با ضرايب ثابت تبديل کرد زيرا :

$$x^2y''+axy'+by=0$$

$$(x=e^t\ ,\ dx=e^tdt)\Rightarrow\frac{dt}{dx}=e^{-t}\ \ \&\ \ \frac{d^2t}{dx^2}=-e^{-t}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D(D-1)y+aDy+b)y=0\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\dfrac{dy}{dt}+by=0\end{array}}$$

که معادله حاصل يك معادله مرتبـه دوم همگن بـا ضـرايب خطـي است.

مثال: مطلوبست حل معادله زير

$$x^2y''-4xy'+6y=0$$

$$\begin{cases} x=e^t\Rightarrow t=\ln x\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-5\dfrac{dy}{dt}+6y=0\ \Rightarrow\ D^2-5D+6D=0\Rightarrow\begin{cases}D=2\\ D=3\end{cases}\end{cases}$$

$$y_g=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}=c_1e^{2\ln x}+c_2e^{3\ln x}=c_1x^2+c_2x^3$$

تـذکر: نتـايج بـالا را بـراي معـادلات ديفرانـسيل کـشي – اويلـر مرتبه بالا نيز مي توان تعميم داد. براي مثال براي معادله کشي – اويلر مرتبه سوم داريم:

$$x^3y'''+ax^2y''+bxy'+cy=0$$

$$[D(D-1)(D-2)+aD(D-1)+bD+c]y=0$$

مثال:

$$x^3y'''+4x^2y''-8xy'+8y=0$$

$$\begin{cases} x=e^t\Rightarrow t=\ln x\\ [D(D-1)(D-2)+4D(D-1)-8D+8]y=0\Rightarrow D=1,2,-4\end{cases}$$

$$y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{-4t}=c_1x+c_2x^2+c_3x^{-4}$$

تذکر: معادله کشي – اويلر غير همگن را نيز مي توان بعد از تغيير متغير مناسب تبديل به معادله با ضرايب غير همگن نمود وآنرا به روش تغيير پارامتر حل کرد.

تمرين: مطلوبست حل معادله زير؟

$$x^2y''+xy'-y=-2x^2e^x$$

روش ضرايب ثابت (ضرايب نامعين)

در معادله غيرهمگن $y''+ay'+by=f(x)$ ملاحظه شد، اگر $f(x)$ تابعي نمايي باشد آن گاه y_p نيز نمايي مي‌باشد. قبلا ديديم كه اگر

$$f(x)=3e^{x} \Rightarrow y_p=\frac{3}{2}e^{x}$$

از اين مطلب استفاده كرده وروشي را به نام روش ضرايب ثابت در حالات خاص $f(x)$ بيان مي كنيم.

۱) اگر $f(x)=Ae^{ax}$ تابع نمايي باشد در صورتي كه a ريشه معادله مفسر نباشد آنگاه y_p نيز بصورت تابع نمايي Be^{ax} است كه با مشتق‌گيري وجايگذاري درمعادله مقدار B بدست مي‌آيد.

۲) اگر $f(x)=Ae^{ax}$ تابع نمايي باشد در صورتي كه a ريشه معادله مفسر با تكرار مرتبه r ام باشد آنگاه y_p نيز بصورت تابع نمايي $Bx^{r}e^{ax}$ است كه با مشتق‌گيري وجايگذاري درمعادله مقدار B بدست مي‌آيد.

مثال: مطلوبست حل معادله زير؟

$$y''-4y'+4y=3e^{2x}$$

$$D^2-4D+4=0\Rightarrow (D-2)^2=0\Rightarrow D=2,2$$

$$y_g=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

$$y_p=Bx^2e^{2x}\Rightarrow\begin{cases}y'_p=2Bxe^{2x}+2Bx^2e^{2x}\\ y''_p=2Be^{2x}+4Bxe^{2x}+4Bxe^{2x}+4Bx^2e^{2x}\end{cases}$$

$$2Be^{2x}+8Bxe^{2x}+4Bx^2e^{2x}-4(2Bxe^{2x}+2Bx^2e^{2x})$$
$$+4Bx^2e^{2x}=3e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2Be^{2x}=3e^{2x}\Rightarrow B=\frac{3}{2}\Rightarrow y_p=\frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

۳) اگر $f(x)=A_0+A_1x+\dots+A_nx^n$ تابع چند جمله اي باشد آن گاه جواب خاص نيز تابعي چند جمله‌اي مي‌باشد. ولي درصورتي جواب همگن به صورت چند جمله‌اي است كه صفر ريشه معادله كمكي از مرتبه تكرار r باشد، آنگاه بايد جواب خاص را در x^r ضرب كنيم. يعني

$$y_p=x^r(B_0+B_1x+\dots+B_nx^n)$$

جواب خاص معادله غير همگن مي‌باشد.

مثال : مطلوبست حل معادله زير؟

حل :

$$y''-y'=1+x^2$$

$$D^2-D=0\Rightarrow (D=0,1)\rightarrow$$ چون صفر يكبار ريشه معادله كمكي است پس

$$y_g=c_1e^{0\times x}+c_2e^{1\times x}=c_1+c_2e^{x}$$

$$y_p=x(B_0+B_1x+B_2x^2)$$

$$\begin{cases}2B_1-5B_0=1\\ 6B_2-2B_1=0\Rightarrow B_2=-\frac{1}{3},B_1=-1,B_0=\frac{-3}{5}\\ -3B_2=1\end{cases}$$

$$y_p=-\frac{3}{5}x-x^2-\frac{1}{3}x^3$$

$$y=c_1+c_2e^{x}-\frac{3}{5}x-x^2-\frac{1}{3}x^3$$

۴) اگر $f(x)=A_1\sin\alpha x+A_2\cos\alpha x$ باشد جواب خاص معادله نيز بصورت مثلثاتي سينوس و كسينوس مي‌باشد و درصورتي كه $D=\pm i$ ريشه مختلط محض معادله مفسر از مرتبه r‌ام باشد دراين حالت بايد جواب خصوصي را در x^j ضرب نمود. يعني:

$$y_p=x^j(B_1\sin\alpha x+B_2\cos\alpha x)$$

مثال : مطلوبست حل معادله زیر؟

$y'' - y = 3\sin x$

حل:

$D^2 - 1 = 0 \Rightarrow D = \pm 1 \rightarrow$ چون a=0 ریشه مختلط محض معادله کمکي نیست

$y_g = c_1 + c_2 e^x$

$y_p = B_0 \sin x + B_1 \cos x$

$$\begin{cases} -B_0 \sin x - B_1 \cos x - B_0 \sin x - B_1 \cos x = 3\sin x \\ -2B_0 = 3 \Rightarrow B_0 - \frac{3}{2},\ -2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \end{cases}$$

$y_p = -\frac{3}{2}\sin x$

$y = c_1 x^x + c_2 e^{-x} - \frac{3}{2}\sin x$

۵) درمعادله غیر همگن، اگر

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

باشد آنگاه به ازاي هر $i=1, 2, \ldots, n$، هرگاه $y_i(x)$، يك جواب معادله غیر همگن

$$y'' + ay' + by = f_i(x)$$

باشد، آنگاه در كل، معادله غیر همگن، جوابي بصورت

$$y_p = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_n(x)$$

دارد.

مثال: مطلوبست جواب خصوصي معادله زیر؟

$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4e^{3x}$

$D^2 - 3D + 2 = 0 \Rightarrow D = 1, 2$

چون α=0 و α=3 ریشه معادله مفسر نیستند پس

$$\begin{cases} y_p = B_0 e^{3x} + B_1 + B_2 x + B_3 x^2 \\ y'_p = 3B_0 e^{3x} + B_2 + 2B_3 x \\ y''_p = 9B_0 e^{3x} + 2B_3 \end{cases} \Rightarrow y_p = 2e^{3x} + \frac{7}{2} + 3x + x^2$$

فصل سوم: دستگاه معادلات دیفرانسیل

دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این فصل با توجه به كاربردهاي دستگاه معادلات دیفرانسیل در فیزيك و مكانيك و دیگر كاربردهاي آن به بررسي و مطالعه این دستگاه ها مي پردازیم.

تعریف: مجموعه‌اي بیش از يك معادله دیفرانسیل همزمان را دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیم.

ساده‌ترين دستگاه معادلات دیفرانسیل دستگاه دو معادله دیفرانسیل مي‌باشد كه عبارت است از:

$$\begin{cases} f(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0 \\ g(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^m y}{dt^m}) = 0 \end{cases}$$

كه این دستگاه قابل با اضافه تر شدن متغیر ها قابل تعمیم هست.

مثال‌هایي از انواع دستگاه معادلات دیفرانسیل:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xt - x \\ \frac{dy}{dt} = 2yt + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + 4y = 1 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2t \\ \frac{dz}{dt} = x + 4y + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3y + x \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات ديفرانسيل

روش كلي براي حل دستگاه معادلات، روشي موسوم به روش **عملگر** يا **اپراتور** يا D مي باشد.

در اين روش فرض مي كنيم كه $\frac{d}{dt} = D$ ، آنگاه با جايگذاري عملگر دستگاه را به روش حذفي گوس حل مي كنيم. با يك مثال اين روش را توضيح مي دهيم .

مثال: مطلوبست حل دستگاه زير؟

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} + 4y = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = t - 1 \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}=D} \begin{cases} 2Dx - x + Dy + 4y = 1 \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2D-1)x + (D+4)y = 1 \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در D ومعادله دوم در D+4 و جمع طرفين دستگاه داريم:

$$D(2D-1)x + (D+4)Dx = D(1) + (D+4)(t-1)$$

$$(2D^2 - D + D^2 + 4D)x = 0 + D(t) + 4t - D(1) - 4$$

$$\boxed{(3D^2 + 3D)x = 4t - 3}$$

$$\boxed{(3D^2 + 3D)x = 4t - 3}$$

معادله بالا معادله ديفرانسيل خطي مرتبه دوم با ضرايب ثابت غيرهمگن مي‌باشد پس:

$$3D^2 + 3D = 0 \Rightarrow 3D(D+1) = 0 \Rightarrow D = 0, -1$$

$$\begin{cases} x_g = c_1 + c_2 e^{-t} \\ x_p = t(A_0 t + A_1) \end{cases}$$

$$x_p = A_0 t^2 + A_1 t \Rightarrow x'_p = 2A_0 t + A_1 \Rightarrow x''_p = 2A_0$$

$$3x''_p + 3x'_p = 4t - 3$$

$$6A_0 + 6A_0 t + 3A_1 = 4t - 3 \Rightarrow A_0 = \frac{2}{3} \quad , \quad A_1 = -\frac{7}{3}$$

$$x_p = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$$

$$x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - t + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - t + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\int dy = \int (-c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3})dt \Rightarrow y = c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^{-t} + \dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{7}{3}t \\ y = c_2 e^{-t} + \dfrac{1}{6}t^2 - \dfrac{4}{3}t + c_3 \end{cases}$$

تذكر: بعد از جايگذاري عملگر D براي حل دستگاه دو معادله ديفرانسيل مي‌توان به جاي روش حذفي يا روش گوس از روابط زير استفاده نمود

$$\begin{cases} f_1(D)x + g_1(D)y = h_1(t) \\ f_2(D)x + g_2(D)y = h_2(t) \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} h_1(t) & g_1(D) \\ h_2(t) & g_2(D) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}} \quad , y = \frac{\begin{vmatrix} h_1(t) & f_1(D) \\ h_2(t) & f_2(D) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}}$$

روش بيان شده يك روش كلي براي حل دستگاه معادلات ديفرانسيل مي باشد ولي هميشه نياز به استفاده از اين روش نيست و مي‌توان همانند حل دستگاه معادلات در رياضيات عمومي، از روش هاي ابتكاري مختلف همانند جمع چند معادله براي حذف پارمترها يا با جايگذاري و ...استفاده نمود براي اين منظور چند مثال ارائه مي‌گردد.

مثال: مطلوبست حل دستگاه زير؟

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2xt-x\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2yt+x\end{cases}$$

چنانكه ملاحظه مي شود معادله اول معادله جداشدني است

$$\frac{dx}{dt}=x(2t-1)\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int(2t-1)dt$$

$$\Rightarrow\ln x=t^2-t+c\Rightarrow x=e^{t^2-t+c}=e^{t^2-t}\cdot e^c\Rightarrow x=c_1e^{t^2-t}$$

$$\xrightarrow{EQ:2}\frac{dy}{dt}=2yt+c_1e^{t^2-t}\Rightarrow\frac{dy}{dt}-2ty=c_1e^{t^2-t}$$

و اين معادله نيز معادله مرتبه اول خطي است پس:

$$y=e^{-\int-2tdt}\left[\int e^{\int-2tdt}\cdot c_1e^{t^2-t}dt+c_2\right]$$

$$y=e^{t^2}\left[c_1\int e^{-t^2}\cdot e^{t^2-t}dt+c_2\right]$$

$$y=e^{t^2}\left[c_1\int e^{-t}dt+c_2\right]\Rightarrow y=e^{t^2}\left[-c_1e^{-t}+c_2\right]\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=c_1e^{t^2-t}\\ y=-c_1e^{t^2-t}+c_2e^{t^2}\end{cases}$$

مثال: مطلوبست حل دستگاه زير:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=3y+x\end{cases}$$

دستگاه دو معادله مرتبه اول خطي با ضرايب ثابت مي‌باشد با مشتق گيري از معادلات دستگاه و استفاده از معادله دوم دستگاه آنرا به معادله مرتبه دوم خطي با ضرايب ثابت تبديل مي كنيم كه با حل آن قبلاً آشنا شده ايم .

$$\xrightarrow{\text{dif from EQ1}}\frac{d^2x}{dt^2}=3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\xrightarrow{\text{from EQ2}}\frac{d^2x}{dt^2}=3\frac{dx}{dt}+3y+x\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{from EQ1}}\frac{d^2x}{dt^2}=3\frac{dx}{dt}+3\left(\frac{dx}{dt}-3x\right)+x\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+8x=0\Rightarrow$$

$$x''-6x'+8x=0\Rightarrow D^2-6D+8=0\Rightarrow D=2,4$$

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$$

$$y=\frac{dx}{dt}-3x=2c_1e^{2t}+4c_2e^{4t}-3c_1e^{2t}-3c_2e^{4t}$$

$$y=-c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$$

$$\begin{cases}x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}\\ y=-c_1e^{2t}+c_2e^{4t}\end{cases}$$

تذكر: همانطوري كه در دستگاه معمولي ممكن است دستگاه داراي جواب منحصر بفرد و يا بي نهايت جواب و يا جواب نداشته باشند در دستگاه معادلات ديفرانسيل نيز چنين مي‌باشد. مثلاً دستگاه

$$\begin{cases}Dx_1-Dx_2=t\\ 4Dx_1-4Dx_2=4t\end{cases}$$

داراي بي نهايت جواب مي باشد.

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{t^2}{2}+c\\[2mm] x_2=5c\end{cases}\quad\&\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{t^2}{2}+c_1\\[2mm] x_2=\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{2}+c_2\end{cases}\quad\&\ldots$$

تمرين: مطلوبست حل دستگاه معادلات ديفرانسيل زير؟

$$1)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=3x+2t\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=x+4y+t\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+x-6=e^t\\[2mm] \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+x+y=t\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-4x-y=e^t\\[2mm] \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0\end{cases}$$

تمرين: دو مخزن هركدام حاوي ۱۰۰ گالن از يك محلول شيميايي است. در مخزن اول ۲۰ كيلوگرم و در مخزن دوم ۱۰ كيلوگرم از اين ماده شيميايي موجود است. در لحظه $t=0$ آب با آهنگ ۲ گالن در دقيقه به مخزن اول وارد مي‌شود و پس از مخلوط شدن با ماده شيميايي، با آهنگ ۲ گالن در دقيقه به مخزن دوم وارد شده، در آنجا هم پس از مخلوط شدن با همان آهنگ خارج مي‌شود، مطلوبست مقدار ماده شيميايي در هر مخزن در لحظه t؟

فصل چهارم: تبديلات لاپلاس

در اين فصل ملاحظه خواهيم كرد چگونه با به كار بردن تبديل لاپلاس در مورد يك معادله ديفرانسيل با شرايط اوليه، مي‌توان آن را به مسئله ساده‌تري تبديل كرده بطوري كه با وارون تبديل لاپلاس جواب مسئله ابتدائي بدست مي‌آيد و همچنين ملاحظه خواهد شد كه روش‌هاي تغيير پارامتر و ضرايب ثابت را در مورد حل معادلات ديفرانسيل غيرهمگن كه تابع طرف دوم ناپيوسته باشد نمي توان بكار برد كه در اين حالت مي‌توان از تبديل لاپلاس استفاده كرد.

تبديل لاپلاس

تبديل مفهوم تعميم يافته تابع مي باشد، يعني رابطه اي كه به هر تابع ، تابع ديگري را نسبت دهد، يك تبديل ناميم. از جمله تبديلات مشهور تبديل مشتق و انتگرال كه معمولاً با نماد زير بترتيب نشان مي دهيم.

$$1)\ D(f(x)) = F'(x)$$

$$2)\ \int f(x)dx = F(x)+c$$

فرض كنيم تابع f برباز $[0,\infty)$ تعريف شده باشد تبديل لاپلاس f را به صورت زير تعريف و نمايش داده مي‌شود:

$$\boxed{\forall s \in R : \mathrm{L}[f(x)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx}$$

مثال: مطلوبست تبديل لاپلاس تابع زير؟

$$f(x)=1$$

$$L(1)=F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^b =$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}e^{0}\right)=\frac{1}{s}\quad \forall s>0$$

$$f(x)=x$$

$$L(x)=F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x dx = \ell im_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-sx}dx =$$

$$=\ell im_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}\Big|_0^b+\int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-sx}dx\right]=\ell im_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}-\frac{1}{s^2}e^{-sx}\right]_0^b$$

$$=\ell im_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}be^{-sb}-\frac{1}{s^2}e^{-sb}+\frac{1}{s}xe+\frac{1}{s^2}e^{0}\right]=\frac{1}{s^2}\quad \forall s>0$$

$$f(x)=x^n$$

$$L(x^n)=\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x^n dx = -\frac{x^n e^{-sx}}{s}\Big|_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{s}L(x^{n-1})=\frac{n}{s}\left(\frac{n-1}{s}\right)L(x^{n-2})=\cdots=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}L(1)\Rightarrow$$

$$L(x^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}\quad \forall s>0$$

تبدیل لاپلاس انواع توابع مهم:

$L(x^n)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$L(e^{ax})=\dfrac{1}{s-a}$
$L(\sin ax)=\dfrac{a}{a^2+s^2}$	$L(\sinh ax)=\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$L(\cos ax)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$L(\cosh ax)=\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$L(\dfrac{\sin kt}{t})=tg^{-1}(\dfrac{k}{s})$	$L(\dfrac{2\sinh kt}{t})=\ln(\dfrac{s+k}{s-k})$
$L(\dfrac{1-e^{-t}}{t})=\ln(1+\dfrac{1}{s})$	

خواص تبدیل لاپلاس

از این خواص مي توان بسياري از تبدیل لاپلاس توابع را پیدا کرد که هر کدام با مثالي ارائه ميگردد.

$$\boxed{1)\,L\left[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots\right]=c_1L\left[f_1(x)\right]+c_2L\left[f_2(x)\right]+\ldots}$$

$$L\left[\cosh 3x-2\sin 4x-e^{2x}\right]=L\left[\cosh 3x\right]-2L\left[\sin 4x\right]-L\left[e^{2x}\right]=\ldots$$

$$\boxed{2)\,L\left[e^{ax}f_1(x)\right]=F(s-a)}$$

$$L\left[e^{bx}\cos ax\right]=\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}\ ,\ L(e^{-2x}x^5)=\frac{5!}{(s+2)^6}$$

$$\boxed{3)\,L(x^n f(x))=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L(f(x))}$$

$$L(x\sin x)=-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})=-\frac{-2s}{(s^2+1)^2}=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L(x^2\sin x)=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L(f(x))=\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s^2+1})=\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

$$\boxed{4)\,L\left[f(ax)\right]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})}$$

$$L(\frac{1-e^{-at}}{at})=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})=\frac{1}{a}\ln(1+\frac{1}{s/a})=\frac{1}{a}\ln(1+\frac{a}{s})$$

$$\boxed{\begin{aligned}&5)\,L(y^{(n)})=s^nL(y)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\cdots-sy^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)\\&L(y')=sL(y)-y(0)\\&L(y'')=s^2L(y)-sy(0)-y'(0)\end{aligned}}$$

$L(\sin^2 x)$:

$$f(x)=\sin^2 x\ \Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$L\left[f'(x)\right]=sL(\sin^2 x)-\sin^2(0)\Rightarrow\frac{2}{s^2+4}=sL(\sin^2 x)\Rightarrow$$

$$L(\sin^2 x)=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

تمرین: مطلوبست تبدیل لاپلاس توابع زیر؟

$1)L(5x^2+12)$ $\quad$ $2)L(3e^{2x}+3x)$ $\quad$ $3)L(e^{i\alpha x})$

$4)L(\sin\alpha x)$ $\quad$ $5)L(\cos\alpha x)$ $\quad$ $6)L(\sinh x)$

$7)L(\cosh\alpha x)$ $\quad$ $8)L(e^{7x}\sin 5x)$ $\quad$ $9)L(e^{3x}\cos 4x)$

$10)L(e^{-2x}x^5)$ $\quad$ $11)L(x\cos x)$

$$1)L(5x^2+12)=5L(x^2)+12L(1)=5\times\frac{2!}{s^3}+12\times\frac{1}{s}=\frac{10}{s^3}+\frac{12}{s}$$

$$2)L(3e^{2x}+3x)=3L(e^{2x})+3L(x)=3\times\frac{1}{s-2}+3\times\frac{1}{s^2}=\frac{3}{s-2}+\frac{3}{s^2}$$

$$3,4,5)L(e^{i\alpha x})=\frac{1}{s-i\alpha}=\frac{1}{s-i\alpha}\times\frac{s+i\alpha}{s+i\alpha}=\frac{s+i\alpha}{s^2+\alpha^2}=\frac{s}{s^2+\alpha^2}+i\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$L(e^{i\alpha x})=L(\cos\alpha x+i\sin\alpha x)=L(\cos\alpha x)+iL(\sin\alpha x)$$

$$L(\sin\alpha x)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\ ,\ L(\cos\alpha x)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

$$6)L(\sinh x)=L(\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2})=\frac{1}{2}\left[L(e^{\alpha x})-L(e^{-\alpha x})\right]=\frac{1}{2}(\frac{1}{s-\alpha}-\frac{1}{s+\alpha})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{s+\alpha-s+\alpha}{s^2-\alpha^2})=\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

$$7)L(\cosh\alpha x)=L(\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2})=(L(e^{\alpha})+L(e^{-\alpha x}))=\frac{1}{2}(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{s+\alpha})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{s+\alpha+s-\alpha}{s^2-\alpha^2})=\frac{s}{s^2-\alpha^2}$$

$$8)L(e^{7x}\sin 5x)=\frac{5}{(s-7)^2+25}\qquad 9)L(e^{3x}\cos 4x)=\frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

$$10)L(e^{-2x}x^5)=\frac{5!}{(s+2)^6}$$

$$11)L(x\cos x)=-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+1})=-\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

معكوس تبديل لاپلاس

فرض كنيم تبديل لاپلاس تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. در اين صورت واضح است كه تابع منحصر بفردي مانند F(s) وجود دارد كه $F(s)= L[f(x)]$

اينك عكس اين حالت را در نظر مي گيريم. فرض كنيد تابعي مانند F(s) داده شده باشد. آيا تابع منحصر بفردي مانند $f(x)$ به گونه اي وجود دارد كه داشته باشيم : $F(s)= L[f(x)]$

اگر پاسخ سؤال مثبت باشد مي نويسيم:

$$f(x)=L^{-1}(F(s))$$

$f(x)$ را وارون يا معكوس تبديل لاپلاس تابع F(s) ناميم.

خواص معكوس تبديل لاپلاس

$$\boxed{1)L^{-1}(c_1F_1(s)+c_2F_2(s)+\dots)=c_1L^{-1}(F_1(s))+c_2L^{-1}(F_2(s))+\dots}$$

$$L^{-1}(\frac{5}{s})=5L^{-1}(\frac{1}{s})=5\times 1=5$$

$$L^{-1}(\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^2+4})=2L^{-1}(\frac{2!}{s^3})+3L^{-1}(\frac{2}{s^2+4})=2x^2 3\sin 2x$$

$$L^{-1}(\frac{2}{s+3})=?\quad L^{-1}(\frac{1}{s^2+s})=?\quad L^{-1}(\frac{1}{s^4+s^2})=?$$

$$\boxed{2)L^{-1}(F(s-a))=e^{ax}f(x)}$$

$$L^{-1}(\frac{1}{s^2+4s+5})=L^{-1}(\frac{1}{(s-2)^2+1^2})=e^{2x}\cdot\sin x$$

$$L^{-1}(\frac{6}{(s+2)+9})=?\quad L^{-1}(\frac{12}{(s+3)^4})=?\quad L^{-1}(\frac{s+3}{s^2+2s+5})=?$$

تمرين: مطلوبست معكوس تبديل لاپلاس توابع زير:

$$1)L^{-1}(\frac{2}{s+3})\qquad 2)L^{-1}(\frac{1}{s^2+s})$$

$$3)L^{-1}(\frac{1}{s^4+s^2})\qquad 4)L^{-1}(\frac{6}{(s+2)+9})$$

$$5)L^{-1}(\frac{12}{(s+3)^4})\qquad 6)L^{-1}(\frac{s+3}{s^2+2s+5})$$

$$\boxed{1)L^{-1}(\frac{2}{s+3})=2L^{-1}(\frac{1}{s-(-3)})=2e^{-3x}}$$

$$\boxed{2)L^{-1}(\frac{1}{s^2+s})=L^{-1}(\frac{1}{s(s+1)})=L^{-1}(\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+1})=L^{-1}(\frac{1}{s})-L^{-1}(\frac{1}{s-(-1)})=1-e^{-x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}3)L^{-1}(\frac{1}{s^4+s^2})&=L^{-1}(\frac{1}{s^2(s^2+1)})=L^{-1}(\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s^2+1})=L^{-1}(\frac{1}{s^2})-L^{-1}(\frac{1}{s^2+1})\\&=x-\sin x\end{aligned}}$$

$$\boxed{4)L^{-1}(\frac{6}{(s+2)+9})=2L^{-1}(\frac{3}{(s+2)^2+3^2})=2e^{-2x}\cdot\sin 3x}$$

$$\boxed{5)L^{-1}(\frac{12}{(s+3)^4})=2L^{-1}(\frac{3!}{(s+3)^4})=2e^{-3x}\cdot x^3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}6)L^{-1}(\frac{s+3}{s^2+2s+5})&=L^{-1}(\frac{s+1+2}{(s-1)^2+2^2})=L^{-1}(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2})+L^{-1}(\frac{2}{(s+1)^2+2^2})=\\&=e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x\end{aligned}}$$

حل معادله ديفرانسيل به روش لاپلاس

اينك آماده هستيم نشان دهيم كه چگونه مي توان جواب يك مسئله با مقدار اوليه دشوار را به كمك تبديلات لاپلاس، به مسئله ديگري با شرايط سادەتر تبديل كرده و سپس با استفاده از وارون تبديل لاپلاس جواب معادله ديفرانسيل را بدست آورد. روش كار را با چند مثال در مورد حل معادلات ديفرانسيل توضيح مي دهيم.

مثال :مطلوبست حل معادله زير؟

$$y'+y=e^x\quad y(0)=1$$

$$L(y'+y)=L(e^x)\Rightarrow L(y')+L(y)=L(e^x)\Rightarrow$$

$$sL(y)-y(0)+L(y)=L(e^x)\Rightarrow sL(y)-1+L(y)=\frac{1}{s-1}\Rightarrow$$

$$(s+1)L(y)=\frac{1}{s-1}+1=\frac{1+s-1}{s-1}=\frac{s}{s-1}\Rightarrow L(y)=\frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}(\frac{s}{(s-1)(s+1)})=L^{-1}(\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+1})\Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}L^{-1}(\frac{1}{s-1})+\frac{1}{2}L^{-1}(\frac{1}{s+1})\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}=\cosh x$$

مثال :مطلوبست حل معادله زیر؟

$$y''+4y=4x \quad y(0)=1, y'(0)=5$$

$$L(y''+4y)=L(4x) \Rightarrow L(y'')+4L(y)=4L(x) \Rightarrow$$

$$s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+4L(y)=\frac{4}{s^2}\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-s-5+4L(y)=\frac{4}{s^2}\Rightarrow (s^2+4)L(y)=s+5+\frac{4}{s^2}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{5}{s^2+4}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{s^2+4}+\frac{1}{s^2}\right)=\cos 2x+2\sin 2x+x$$

تمرین: مطلوبست حل معادلات زیر؟

1) $y'+2y=e^{-x} \quad y(0)=2$

2) $y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x \quad y(0)=0, y'(0)=3$

3) $y''+2y'+y=3xe^{-x} \quad y(0)=4, y'(0)=2$

1) $y'+2y=e^{-x} \quad y(0)=2$

$$L(y'+2y)=L(e^{-x})\Rightarrow L(y')+2L(y)=L(e^{-x})\Rightarrow$$

$$sL(y)-y(0)+2L(y)=L(e^{-x})\Rightarrow (s+2)L(y)=\frac{1}{s+1}+2=\frac{2s+3}{s+1}$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right)\Rightarrow$$

$$y=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right)\Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)\Rightarrow y=e^{-x}+e^{-2x}$$

2) $y''+2y'+5y=3e^{-x}\sin x \quad y(0)=0, y'(0)=3$

$$L(y''+2y'+5y)=L(3e^{-x}\sin x)\Rightarrow$$

$$L(y'')+2L(y')+5L(y)=3L(e^{-x}\sin x)\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+2\left[sL(y)-y(0)\right]+5L(y)$$

$$=\frac{3}{(1+s)^2+1}\Rightarrow$$

$$(s^2+2s+5)L(y)-3=\frac{3}{(1+s)^2+1}\Rightarrow$$

$$L(y)=\frac{3(s^2+2s+3)}{((1+s)^2+1)+((1+s)^2+4)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(y)=\frac{1}{((1+s)^2+1)}+\frac{2}{((1+s)^2+4)}=e^{-x}\sin x+2e^{-x}\sin 2x$$

3) $y''+2y'+y=3xe^{-x} \quad y(0)=4, y'(0)=2$

$$L(y''+2y'+5y)=L(3xe^{-x})\Rightarrow L(y'')+2L(y')+5L(y)$$

$$=3L(e^{-x}\sin x)\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+2\left[sL(y)-y(0)\right]+L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}\Rightarrow$$

$$s^2L(y)-4s-2+2sL(y)-8+L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}\Rightarrow$$

$$(1+2s+1)L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}+4s+10\Rightarrow (1+s)^2L(y)=\frac{3}{(1+s)^2}+4s+10$$

$$L(y)=\frac{3}{(1+s)^4}+\frac{4s+10}{(1+s)^2}=\frac{3}{(1+s)^4}+\frac{4(1+s)+6}{(1+s)^2}$$

$$=\frac{3}{(1+s)^4}+\frac{4}{(1+s)}+\frac{6}{(1+s)^2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^3e^{-x}+6xe^{-x}+4e^{-x}$$

قضيه: اگر F(s)=L[$f(x)$] و G(s)=L[$g(x)$] و هر دو به ازاي s>0 موجود باشد آنگاه

H(x)= F(s)G(s)= L[$h(x)$]

که در آن $\longleftarrow$ $h(x)=\int_0^x f(x-u)g(u)du$

تابع h به **کنولوسيون توابع** f و g معروف است و آن را با $h=f*g$ نشان مي دهيم.

مي‌توان نشان داد:

$$h=f*g=g*f$$

مثال: با بكار بردن كنولوسيون تبديل معكوس تابع زير را پيدا مي‌كنيم؟

$$H(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\quad G(s)=\frac{a}{s^2+a^2}\Rightarrow H=F\times G$$

$$L(x)=\frac{1}{s^2},L(\sin ax)=\frac{a}{s^2+a^2}\Rightarrow$$

$$h(x)=f*g(x)=\int_0^x(x-u)\sin au\,du\Rightarrow$$

$$h(x)=\frac{ax-\sin ax}{a^2}$$

تابع گاما: اين تابع را به صورت زير تعريف و نمايش مي‌دهيم:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

كه انتگرال فوق به ازاء n>0 همگراست.

اين تابع داراي خواص زير مي‌باشد:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\qquad \Gamma(n+1)=n!\,;n=0,1,2,\ldots$$

$$\Gamma(1)=1\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$L(t^n)=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

مثال: مطلوبست تبديل لاپلاس زير؟

$$L(t^{1/2})=\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(1/2)}{s^{3/2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}=\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

تمرين: مطلوبست تبديل لاپلاس زير؟

$$L(t^4-2t^{3/2}+6)??$$

فصل پنجم: حل معادله ديفرانسيل

به روش سري‌ها

حل معادله ديفرانسيل به روش هاي سريها

درفصل قبل با حل معادلات ديفرانسيل خطي مرتبه دوم با ضرايب ثابت، درچند حالت خاص با ضرايب متغير آشنا شديم. دراين فصل با يكي از موثرترين روش حل براي معادلات ديفرانسيل خطي مرتبه دوم (وبالاتر)، يعني، از سريهاي تواني استفاده مي كنيم. دردرس رياضيات عمومي با مفهوم سري آشنا شده ايم . براي اينكه مطالب اين فصل رابهتر درك كنيم، بحث را با مرور مختصري برسريهاي تواني شروع مي كنيم.

سري تواني

سري به صورت

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

يا $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ كه درآن $x_0,a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ اعداد ثابتي بوده و x متغير است را سري تواني به مركز x_0 ناميم.

سري تواني ممكن است كه دريكي از سه حالت زير صدق كند:

۱- تنها به ازاي $x = x_0$ همگرا باشد.

۲- به ازاي هر x دريك همسايگي x_0 مطلقا همگرا باشد، يعني براي $|x - x_0| < R$ همگرا وبراي $|x - x_0| > R$ واگر باشد عدد R را شعاع همگرايي سري ناميم.

۳- به ازاي هر x مطلقا همگرا باشد.

مجموعه مقادير x را كه سري تواني همگرا است، بازه (فاصله)همگرايي سري مي ناميم.

تذكر: اگر سري به ازاي $x = x_0 \pm R$ همگرا باشد آنگاه بازه همگرايي برابر است با

$$x_0 - R \le x \le x_0 + R$$

دردرس رياضي عمومي با پيدا كردن بازه همگرايي سري تواني آشنا شده ايم كه شعاع همگرايي عبارت است از

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ممكن است $R = \infty$ آنگاه حد بالا نامتناهي باشد.

مثال:بازه همگرايي سري تواني $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ را پيدا كنيد .

چون

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

بنابراين ، سري تنها به ازاي $x = 0$ همگرا است.

مثال :بازه همگرايي سري تواني $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n!}$ را پيدا كنيد.

چون

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| = +\infty$$

پس سري روي مجموعه اعداد حقيقي، يعني در همه جا همگرا است .

مثال :بازه همگرايي سري تواني $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(x-2)^n$ را پيدا كنيد.

چون

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right| = 1$$

پس، سري روي مجموعه x هايي كه $|x-2| < 1$ همگرا است .

قضيه :اگر سري تواني بربازه $|x - x_0| < R$ كه درآن R يك عدد ثابت مثبت است همگرا باشد، آنگاه سري تواني تابعي مانند $f(x)$ را تعريف مي كند كه به ازاي هر x دربازه پيوسته است.

تذكر:به طور طبيعي اين سوال مطرح مي شود كه به كدام تابع پيوسته همگرا است.

پاسخ دادن به اين سوال درحالت كلي آسان نيست.

قضيه : اگر $f(x)$ به صورت زير توسط يك سري تواني تعريف شده باشد،

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad |x-x_0|<R$$

آنگاه مي توان از سري بالا جمله به جمله مشتق گيري كرد

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$$

و همين طور انتگرال گرفت يعني:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad a,b\in(x_0-R,x_0+R)$$ كه

قضيه : فرض كنيم :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

آن گاه

الف) به ازاي هر عدد حقيقي c داريم:

$$cf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ca_n(x-x_0)^n$$

ب) $$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

ج) $$f(x).g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

كه دران:

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n}a_Kb_{n-K}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$$

تذكر : با انتقال انديس مي توان نشان داد كه :

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(x-x_0)^n$$

بعبارت ديگر، با كم كردن k واحد از انديس جمع سري واضافه كردن k واحد به همه n هاي داخل علامت $\sum$ سري، دو سري مساوي به دست مي آيد.

تذكر: ۱۲،۱،۳- دركار كردن با سريهاي تواني با مركزبسط x_0 مخالف با صفر، غالبا به كار بردن تغيير متغير $z=x-x_0$ مفيد است. يعني :

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

قضيه: فرض كنيم سري $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ براي $|x-x_0|<R$ با $R>0$ همگرا به تابع $f(x)$ باشد، بسادگي نشان داده مي شود كه

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

ودرحالت خاص اگر $x_0=0$ آنگاه

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \ , \ n=0,1,2,\ldots$$

تعريف: سري را

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

بسط سري تيلر $f(x)$ ، حول نقطه x_0 وسري را

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

بسط ماك لورن $f(x)$ حول نقطه صفر مي ناميم.

تعريف: اگر سري

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

به ازاي هر x دربازه (x_0-R,x_0+R) به $f(x)$ همگرا باشد مي گوييم f درنقطه x_0 تحليلي است.

مثال : بسط سري ماك لورن برخي توابع عبارت است از:

الف) $e^x = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ که $|x| < \infty$

ب) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ که $|x| < \infty$

ج) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ که $|x| < \infty$

د) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ که $|x| < 1$

ه) $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ که $|x| < \infty$

و) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ که $|x| < \infty$

نقاط معمولي ومنفرد

تعريف: نقطه x_0 را يك نقطه معمولي (عادي) براي معادله ديفرانسيل خطي مرتبه n ام

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$$

مي گويم هرگاه ضرايب $f_i(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحليلي باشند. نقطه اي را كه معمولي نباشد نقطه منفرد (غير عادي)معادله مي ناميم.

مثال : نقاط منفرد معادله ديفرانسيل

$$x^3(x^2-1)y'' + x(x+1)y' + (x-1)y = 0$$

را پيدا كنيد.

حل: معادله را با تقسيم بر $x^3(x^2-1)$ بصورت ضريب مشتق بالا ترين برابر يك مي كنيم يعني:

$$y'' + \frac{1}{x^2(x-1)}y' + \frac{1}{x^3(x+1)}y = 0$$

بديهي است كه همه ضرايب اين معادله درهمه نقاط به جز نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ تحليلي مي باشند. پس آنها نقاط منفرد وهمه نقاط ديگر نقاط معمولي معادله هستند.

قضيه: اگر هريك از توابع $g, f_{n-1}, \ldots, f_1, f_0$ درنقطه x_0 تحليلي باشند، آن گاه يك جواب منحصر به فرد مانند $y(x)$ وجود دارد كه در x_0 تحليلي است ودر n شرط اوليه

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

صدق مي كند. يعني هر جواب معادله ديفرانسيل توسط سري تيلر خود درنقطه x_0 دربازه I بيان مي شود .

جواب هاي سري معادلات ديفرانسيل (دريك نقطه معمولي)

مثال : معادله ديفرانسيل مرتبه اول $y' = y$ را با پيدا كردن جواب بصورت سري مك لورن حل مي كنيم.

حل: فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

كه $R > 0, |x| < R$

چون $y' = y$ پس بايد : $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\begin{cases} a_1 = a_0 \\ 2a_2 = a_1 \\ 3a_3 = a_2 \\ 4a_4 = a_3 \\ \vdots \\ (n+1)a_{n+1} = a_n \\ \vdots \end{cases}$$

وبا حل کردن دستگاه از بالا به پایین نتیجه مي شود که:

$$a_1 = a_0, a_2 = \frac{a_0}{2!}, a_3 = \frac{a_0}{3!}, \ldots, a_n = \frac{a_0}{n\,!}, \ldots$$

ويارابطه بازگشتي $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

که به دست مي آوریم، $a_n = \frac{a_0}{n!}$

حال با جایگذاري ضرایب بالا در $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

داریم :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

که a_0 پارامتر مي باشد دقت کنیم که جواب بالا همان جوابي است که از روش هاي قبلي بدست مي آید یعني $y = a_0 e^x$ جواب معادله جداشدني بالا است.

مثال : بسط تیلر جواب هاي معادله

$$y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$$

را درنقطه معمولي $x = 1$ پیدا کنید.

حل: براي سادگي از تغییر متغیر $t = x - 1$ استفاده مي کنیم دراین صورت متناظر $x = 1$ با $t = 0$ مي باشد وداریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

بنابراین با جایگذاري ، معادله دیفرانسیل تبدیل به معادله

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t^2 \frac{dy}{dt} - 4ty = 0$$

مي شود چون همه ضرایب چند جمله اي هستند

، پس بازه همگرایي سریهاي جواب معادله برابر با $-\infty < t < +\infty$ است، بازه همگرایي سریهاي جواب معادله اصلي نیز برابر با $-\infty < x < +\infty$ است . سري تواني جواب را بصورت سري ماك لورن

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

درنظر مي گیریم . پس:

$$\frac{dy}{dt} = a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2a_2 + \ldots + n(n-1)a_n t^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

با قرار دادن سریهاي بالا درمعادله دیفرانسیل ثانویه داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 3\times 2a_3 - 4a_0 = 0 \\ 4\times 3a_4 + a_1 - 4a_1 = 0 \\ 5\times 4a_5 + 2a_2 - 4a_2 = 0 \\ 6\times 5a_6 + 3a_3 - 4a_3 = 0 \\ 7\times 6a_7 + 4a_4 - 4a_4 = 0 \\ \vdots \\ n(n-1)a_n + (n-3)a_{n-3} - 4a_{n-3} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

درنتیجه:

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = \frac{3a_1}{4\times 3} \quad , \quad a_3 = \frac{4a_0}{3\times 2}$$

$$a_5 = 0 \quad , \quad a_7 = 0 \quad , \quad a_6 = \frac{4a_0}{6\times 5\times 3\times 2}$$

$$a_8 = 0 \quad , \quad a_{10} = 0 \quad , \quad a_9 = \frac{2\times 4a_0}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$$

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{12} = \frac{5\times 4\times 2a_0}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}$$

چنانکه ملاحظه مي شود همه ستون هاي سوم وستون دوم بغیر اولین جمله بقیه صفراند تنها ستون اول ناصفرمي باشدوبرحسب a_0 است بنابراین:

$$a_3 = \frac{-(3n-3-4)}{3n(3n-1)} a_{3n-3} = \frac{-(3n-7)}{3n(3n-1)} a_{3n-3}$$

$$a_{3n} = \frac{(3n-7)(3n-10)\ldots\times 8\times 5\times 2\times(-1)^n \alpha 4}{3n(3n-3)\ldots(3)\times(3n-1)(3n-4)\ldots\times 2} a_0$$

$$a_{3n} = \frac{2\times 5\times 8\times\ldots\times(3n-10)(3n-7)\times(-1)^n\times 4}{3^n(n(n-1)(n-2)\ldots.\times(2\times 1)2\times 5\times\ldots\times(3n-4)\times(3n-1)}$$

$$a_{3n} = \frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!\times(3n-4)(3n-1)}$$

$$y = a_0 + a_1 t + 0t^2 + \frac{4}{3\times 2} a_0 t^3 + \frac{3}{4\times 3} a_1 t^4 + 0t^5 + \frac{4}{6\times 5\times 3\times 2} a_0 t^6$$
$$+ 0t^7 + 0t^8 + \frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} a_0 t^9 + 0t^{10} + 0t^{11} +$$
$$\frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} a_0 t^{11} + \ldots$$

$$y = a_1(t + \frac{1}{4}t^4) + a_0(1 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{4}{6\times 5\times 3\times 2}t^6 +$$
$$\frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}t^9 + \frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}t^{12} + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^n.4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}t^{3n} + \ldots$$

ويا $y = a_1(t + \frac{1}{4}t^4) + a_0(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)} t^{3n})$

با قرار دادن $t = x-1$ داريم :

$$y(x) = a_1((x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4) + a_0(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}(x-1)^{3n})$$

جواب عمومي معادله ديفرانسيل داده شده به ازاي هر X مي باشد.

تذكر: ممكن است رابطه بازگشتي بر حسب جمله عمومي امكان پذير نباشد يا بسادگي نتوان پيدا كرد در چنين حالتي جمله عمومي را معمولا"پيدا نمي كنيم.

معادله ديفرانسيل خطي مرتبه دوم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

كه در آن p عدد ثابتي است به معادله ديفرانسيل **لژاندر** موسوم است.ملاحظه مي شود كه نقطه $x_0 = 0$ يک نقطه معمولي معادله است بنابراين داراي جوابي بصورت:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

است كه حداقل براي $|x| < 1$ همگراست .

كه با جايگذاري در معادله داريم:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

با تغيير انديس داريم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x_n - \sum_{n=0}^{\infty} 2xa_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n\right]x^n = 0$$

ورابطه بازگشتي:

$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + 2n - p(p+1)}{(n+2)(n-1)} a_n$$
$$= \frac{n^2 - n + 2n - p^2 - p}{(n+2)(n+1)} a_n$$
$$= \frac{n^2 - p^2 + n - p}{(n+2)(n+1)} a_n$$
$$= -\frac{(p-n)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad , \quad n \geq 0$$

نتيجه مي شود كه:

که با جايگذاري در معادله داريم:

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2!}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3\times 4}a_2 = \frac{p(p-1)(p+1)(p+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\times 5}a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

$$a_6 = -\frac{(p-4)(p+5)}{5\times 6}a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6\times 7}a_5 = -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

با قرار دادن اين ضرايب در سري داريم:

$$y = a_0 + a_1x + \left(-\frac{p(p+1)}{2!}a_0\right)x^2 + \left(-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1\right)x^3 + \left(\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0\right)x^4 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{2!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7 + \cdots\right)$$

که براي $|x|<1$ همگراست واگر p عدد صحيح نباشد شعاع همگرايي هر دو سري داخل پرانتز برابر با يک است.توابع تعريف شده در جواب سري مشهور به توابع لژاندر مي باشد که توابع متعالي هستند.در حالت خاص p جواب سري ها ممکن است متناهي باشد.

نقاط منفردمنظم معادلات ديفرانسيل خطي مرتبه دوم

فرض کنيم که نقطه x_0 يك نقطه منفرد معادله ديفرانسيل خطي همگن

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

باشد درصورتي که اگر معادله را بصورت

$$(x-x_0)^2y'' + (x-x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$$

بنويسيم و $q(x), p(x)$ در x_0 تحليلي باشند، نقطه را نقطه منفرد منظم ناميم واگر $q(x), p(x)$ تحليلي نباشند را نقطه منفرد غير منظم مي گوييم.

مثال :نوع نقاط منفرد معادله ديفرانسيل

$$(x-1)y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = 0$$

را پيدا کنيد.

حل: با تقسيم دو طرف معادله در $x-1$ ، معادله بالا به صورت

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2}{x-1}y = 0$$

در مي آيد مشاهده مي کنيم که نقاط منفرد عبارت است از : $x=1, x=0$ با ضرب معادله بالا در x^2 داريم :

$$x^2y'' + x\frac{1}{x-1}y' - \frac{2x^2}{x-1}y = 0$$

پس $q(x) = \frac{-2x^2}{x-1}, p(x) = \frac{1}{x-1}$

که هر دو در$x=0$ تحليلي اند. پس $x=0$ يك نقطه منفرد منظم است. حال اگر طرفين معادله را در $(x-1)^2$ ضرب کنيم داريم :

$$(x-1)^2y'' + \frac{x-1}{x}y' - \frac{2(x-1)}{1}y = 0$$

که ، هردو $q(x) = -2(x-1), p(x) = \frac{1}{x}$ در $x=1$ تحليلي اند

پس $x=1$ يك نقطه منفرد منظم است.

مثال : معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

را به صورت زير مي نويسيم .

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

روشن است که $x=1$ و $x=-1$ نقاط منفرد معادله اند که اگر طرفين معادله را در $(x-1)^2$ ضرب مي کنيم داريم :

$$(x-1)^2y'' + \frac{2x(x-1)}{(x+1)}y' - \frac{p(p+1)(x-1)}{x+1}y = 0$$

آنگاه:

$p(x)=\frac{2x(x-1)}{(x+1)}$ و $q(x)=\frac{-p(p+1)(x-1)}{x+1}$ هردو در $x=1$ تحليلي اند پس $x=1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.

حال اگر طرفين معادله را در $(x+1)^2$ ضرب كنيم داريم :

$$(x+1)^2y''+\frac{2x(x+1)}{(x-1)}y'-\frac{p(p+1)(x+1)}{x-1}y=0$$

كه $p(x)=\frac{2x(x+1)}{(x-1)}$ و $q(x)=\frac{-p(p+1)(x+1)}{x-1}$ هردو در $x=-1$ تحليلي اند پس $x=-1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.

مثال: معادله ديفرانسيل خطي

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

را كه به معادله بسل(Bessel) از مرتبه p معروف است در نظر مي گيريم در اين معادله كه p عدد ثابت نا صفر مي باشد با نوشتن معادله بصورت

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-p^2}{x^2}y=0$$

ملاحظه مي شود كه $x=0$ نقطه منفرد معادله مي باشد وبا توجه به توابع $p(x)=1, q(x)=x^2-p^2$ كه درنقطه $x=0$ تحليلي اند پس $x=0$ نقطه منفرد ومنظم معادله است.

تعريف: سري بصورت

$$y=(x-x_0)^s\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+s}$$

كه در آن s عددي حقيقي ويا مختلط است به سري فروبنيوس (frobenius) مشهور است.

تذكر: اگر $x=x_0$ يک نقطه منفرد منظم معادله مرتبه دوم خطي باشد ثابت مي شود كه معادله داراي يک وگاهي دو جواب بصورت سري فروبنيوس با $a_0\neq 0$ است.

در اينجا s عددي حقيقي است

اين روش را با ارائه چند مثال توضيح مي دهيم.

مثال: معادله ديفرانسيل

$$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0$$

را در نظر مي گيريم واضح است كه $x_0=0$ نقطه منفرد منظم معادله است جواب سري فروبنيوس

$$y=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}$$

را در نظر مي گيريم بنابراين :

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}\Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}$$

با جايگذاري در معادله ديفرانسيل نتيجه مي شود:

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}+x(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

و يا:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

با تغيير انديس داريم :

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

$$2(s)(s-1)a_0x^s+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}+sa_0x^s$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}-a_0x^s-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

و يا :

$$(2s(s-1)+s-1)a_0x^s+\sum\left[2(n+s)(n+s-1)+(n+s)-1\right]a_n+2(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}=0$$

چون فرض بر آن است که $a_0 \neq 0$ پس :

$$2s(s-1)+s-1=0$$
$$2s^2-2s+s-1=0$$
$$2s^2-s-1=0$$

اين معادله را معادله شاخص و ريشه هاي آن را توان شاخص معادله ديفرانسيل در نقطه منفرد منظم ناميم . پس توان هاي

$$s=-\frac{1}{2}, s=1$$

شاخص معادله ديفرانسيل در نقطه منفرد منظم هستند

حال به ازاي هر کدام از مقادير s ضرايب a_n ها در رابطه بازگشتي :

$$\left(2(n+s)(n+s-1)+n+s-1\right)a_n=-2(n+s-1)a_{n-1}$$

و يا :

$$a_n=\frac{-2(n+s-1)}{2(n+s)(n+s-1)+n+s-1}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1$$

$$=\frac{-2(n+s-1)}{(n+s-1)(2n+2s+1)}a_{n-1}=\frac{-2}{2n+2s+1}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1$$

صدق مي کند .

الف) اگر $s=1$ رابطه بالا نتيجه مي دهد که :

$$a_n=\frac{-2}{2n+3}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1$$
$$a_1=\frac{-2}{5}a_0$$
$$a_2=\frac{-2}{7}a_1=\frac{(-2)(-2)}{5\times 7}a_0$$
$$a_3=\frac{-2}{9}a_2=\frac{(-2)(-2)(-2)}{5\times 7\times 9}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n=\frac{(-2)^n}{5\times 7\times 9\times\cdots\times(2n+3)}a_0$$

ب) اگر $s=-\frac{1}{2}$ آنگاه :

با $n\geq 1$

$$a_n=\frac{-2}{2n+2(-\frac{1}{2})+1}a_{n-1}=\frac{-2}{2n}a_{n-1}=\frac{-1}{n}a_{n-1}$$

پس :

$$a_1=\frac{-1}{1}a_0=-a_0$$
$$a_2=-\frac{1}{2}a_1=\frac{(-1)(-1)}{2}a_0$$
$$a_3=-\frac{1}{3}a_2=\frac{(-1)(-1)(-1)}{2\times 3}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n=-\frac{1}{n}a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}a_0$$

در نتيجه دو جواب سري فروبينوس عبارت است از :

$$y_1=x\left(1+\frac{-2}{5}x+\frac{(-2)^2}{5\times 7}x^2+\frac{(-2)^3}{5\times 7\times 9}x^3+\cdots+\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n+\cdots\right)$$

$$y_2=x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x+\frac{(-1)^2}{2!}x^2+\frac{(-1)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\cdots\right)$$

و دو تابع y_1 , y_2 بدليل $x^{-\frac{1}{2}}$ در بازه $(0,+\infty)$ مستقل خطي و همگرا هستند پس :

$$y=c_1x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n\right)+c_2x^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)$$

جواب عمومي معادله ديفرانسيل است .

حالتي که معادله شاخص داراي ريشه هاي برابر است.

تذکر: درادامه بحث خود معادلاتي را مورد بررسي قرار مي دهيم که داراي يک نقطه منفرد در $x=0$ است.در اين حالت معادله به صورت $x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$ در مي آيد،که در آن $q(x), p(x)$ در $x=0$ تحليلي هستند.همچنانکه قبلا مشاهده کرديم،اين محدوديت از کليت بحث نمي کاهد، زيرابا تغيير متغير $t=x-x_0$ نقطه منفردمنظم x_0 را به صفر تبديل مي کند.

- بررسي حالت کلي

معادله ديفرانسيل مرتبه دوم

$$x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$$

را در نظرمي گيريم . فرض $x=0$ نقطه منفردمنظم باشد در اين صورت در $q(x),p(x)$ تحليلي هستند،در نتيجه به ازاي $|x|<R$ ، داريم:

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \qquad q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$$

و y تابعي بصورت:

$$y(x)=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\partial\infty}a_nx^{n+s}$$

باشد، آنگاه:

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)x^{n+s-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}$$

$$xp(x)y'(x)=x^s(\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_kp_{n-k})x^{n+s}$$

$$q(x)y(x)=x^s(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kq_{n-k})x^{n+s}$$

با قرار دادن مقادير بالا در معادله ديفرانسيل داريم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_kp_{n-k})x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kq_{n-k})x^{n+s}=0$$

در نتيجه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+s)(n+s-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}[(k+s)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k\}x^{n+s}=0$$

که با فرض ضريب کوچکترين توان x, $(n=0)$ داريم:

$$s(s-1)a_0+(sp_0+q_0)a_0=0$$

چون $a_0\neq 0$ پس

$$f(s)=s(s-1)sp_0+q_0$$

ويا

$$f(s)=s^2+(p_0-1)s+q_0$$

معادله شاخص مي باشد و ريشه هاي آن را **توان هاي شاخص** معادله ديفرانسيل در نقطه منفرد منظم ناميده مي شود.

ملاحظه مي شودکه سه حالت زير مي تواند در مورد معادله شاخص رخ دهد:

الف) اگر s_1-s_2 عدد غير صحيح وغيرصفر باشد.

ب) اگر s_1-s_2 عدد صحيح ومثبت باشد.

ج) اگر s_1-s_2 صفر باشد.

در حالت الف) معادله ديفرانسيل داراي دو جواب مستقل به صورت

$$y_1(x)=x^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \text{ و } y_2(x)=x^{s_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

دارد. قبلا مثالهايي در اين مورد ملاحظه شد.

در حالت ب) و ج) فقط يک جواب به صورت

$$y_1(x)=x^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

دارد. براي پيدا کردن جواب مستقل ديگر نشان داده مي شود که جواب به صورت

$$y_2=Ay_1(x)\log x+x^{s_2}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

است که مي توان با مشتق گيري وجايگذاري در معادله ديفرانسيل ضرايب c_n ها و A را پيدا کردکه ممکن است مقدار A برابرصفر باشد که در اين صورت $y_2(x)$به شکل يک سري فروبينوس مي با شد.

تذکر: در فيزيک و رياضيات محض،اغلب بررسي جواب معادله ديفرانسيل $x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$

وقتي متغير مستقل x بينهايت باشد،مورد نظر است. با به کار بردن تغيير متغير $x=\frac{1}{t}$ مقادير بزرگ x با مقاديرکوچک t متناظر خواهند بود.

با جایگذاري t به جاي x جوابهايي از معادله ديفرانسيل جديد را بدست
مي آوريم که اگر معادله جديد داراي يک نقطه معمولي در $t = 0$ باشد، گوييم معادله ديفرانسيل داراي يک نقطه معمولي دربينهايت است. به همين نحو، اگر معادله جديد داراي يک نقطه منفرد منظم در $t = 0$ باشد، گوييم معادله ديفرانسيل داراي يک نقطه منفرد منظم دربينهايت است.

پايان

موفق باشيد